Příklad 61:
Z Prahy do Athén je 2150 km. V Praze byl osazen 1 válec auta novou svíčkou, jejíž životnost má normální rozdělení s průměrem 10000 km a směrodatnou odchylkou 3000 km.
Jaká je pravděpodobnost, že automobil překoná vzdálenost tam i zpět, aniž bude nutno tuto svíčku měnit?

$\mathbf{N(\mu,\sigma^2)}$

$\mu = 10\ 000$
$\sigma = 3\ 000$
$\sigma^2 = 3\ 000^2$

$$P(X > 2 \cdot 2150) = P(U > \frac{2 \cdot 2150 - 10000}{3000}) = P(U > -1{,}9) =$$

$$= 1 - \phi(-1{,}9) = 1 - [1 - \phi(1{,}9)] = \phi(1{,}9) \doteq \underline{\underline{0{,}97128}}$$

Příklad 1:
Při provozu balícího automatu vznikají během směny náhodné poruchy.
Ze zkušeností víme, že během směny dochází v průměru ke 2 poruchám.
Jaká je pravděpodobnost, že během 24 hodin (třísměnného provozu) nedojde ani jednou k poruše?

$\mathbf{Po(\lambda)}$

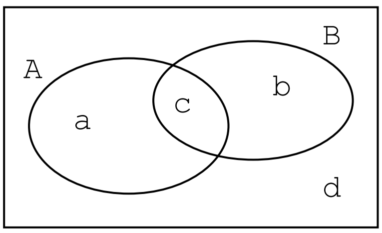
2 poruchy za 1 směnu
za 3 směny 2 · 3 = **6** poruch

očekávaná hodnota $\boldsymbol{\lambda = 6}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \qquad P(X = 0) = \frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} = e^{-6} \doteq \underline{\underline{0{,}00248}}$$

Příklad 4:
Pravděpodobnost, že hasící systém továrny (jev A) selže, je 20%, pravděpodobnost, že selže poplachové zařízení (jev B), je 10% a pravděpodobnost, že selžou oba najednou (A průnik B), je 4%.
Jaká je pravděpodobnost, že:
a) Alespoň jeden bude fungovat? (Doplněk jevu "selžou oba současně")
b) Oba dva budou fungovat?

$P(A) = a + c = 20\% = 0{,}20$
$P(B) = b + c = 10\% = 0{,}10$
$P(A \cap B) = c = 4\% = 0{,}04$

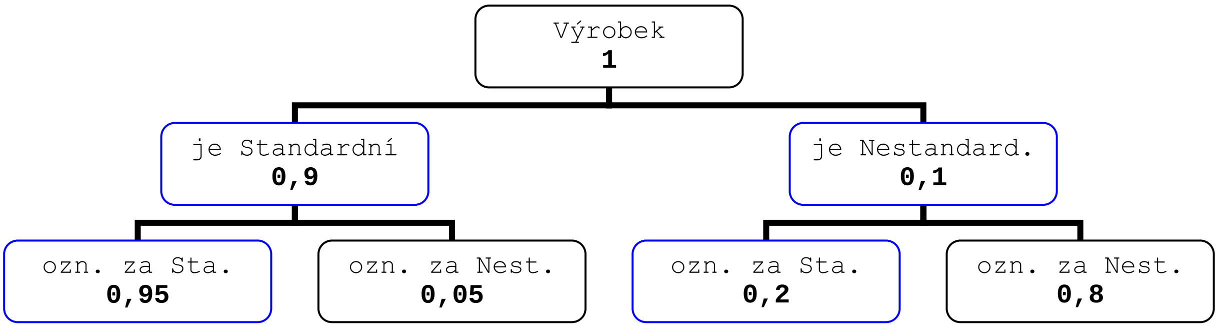


a) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = a + b + d = 1 - c = 1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}96}}$

b) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = d = 1 - 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}74}}$

Příklad 5:

Je známo, že 90% výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, kdežto u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,20.
Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je standardní?



A – je označen za standardní
B_1 – je Standardní
B_2 – je Nestandardní

$P(B_1) = 0{,}90$
$P(A|B_1) = 0{,}95$
$P(A|B_2) = 0{,}20$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}9}{0{,}95 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}855}{0{,}875} \doteq \underline{\underline{0{,}977}}$$

Příklad 3:

Určitý typ součástek je dodáván v sériích po 200 kusech. Při přejímací kontrole je z každé série náhodně vybráno 5 výrobků. Série je přijata, jestliže mezi kontrolovanými výrobky není žádný zmetek. Jaká je pravděpodobnost, že série bude přijata, jestliže obsahuje 10 zmetků?

Hy(n;M;N)

N = 200
M = 10
N = 5

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{200-10}{5-0}}{\binom{200}{5}} \doteq \underline{\underline{0{,}7717}}$$

Příklad 26:

Aby sloužila lépe svým inzerentům podnikla rozhlasová stanice zaměřená na hudební pořady u 500 posluchačů průzkum za účelem zjištění, zda dávají přednost klasické nebo populární hudbě. Výsledky pozorování roztříděné podle věku byly následující:

věk	vážná hudba	populární hudba
pod 25 let	45	108
25 – 50	72	71
nad 50 let	108	96

Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro podíl mládeže do 25 let, která dává přednost populární hudbě (v rámci celé populace).

N = 500
n = 153
x = 108

$\alpha = 0{,}01 \qquad u_{0,995} \doteq 2{,}58$

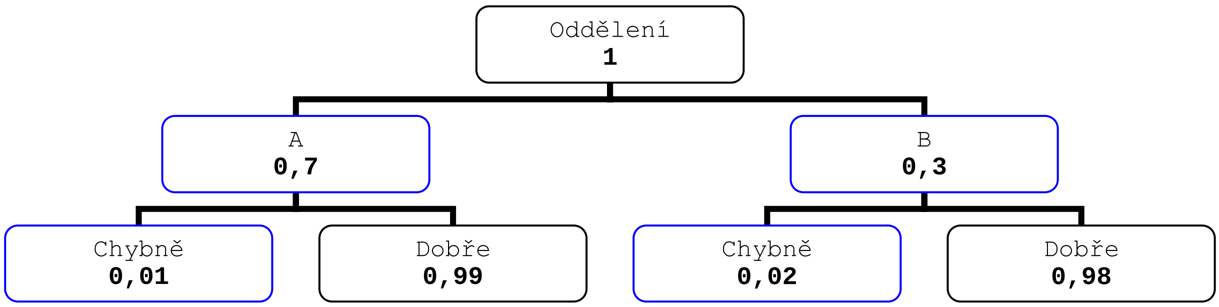
$$p \pm \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \right) \qquad p = \frac{108}{153} \doteq 0{,}706 \qquad \widehat{P(1-P)} = p(1-p) = 0{,}706 \cdot 0{,}294 = 0{,}207564$$

$$2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}207564}{153}} \doteq 0{,}0949$$

70,60% z 500 = 353; 9,49% z 500 $\doteq$ 47; 353 ± 47 = (306; 400)

Příklad 11:

Podle analýzy receptů ze stejného nemocničního oddělení provedeného v lékárně vyplynulo, že lékař A napsal 70% receptů, z nichž 1% bylo předepsáno chybně a lékař B napsal 30% receptů, z nichž chybně předepsána byla 2%.
a) Jaká je pravděpodobnost chybně napsaného receptu v daném oddělení?
b) Je-li recept předepsán chybně, jaká je pravděpodobnost, že ho napsal lékař B?



A – recept je napsán chybně
B_1 – recept napsal lékař B
B_2 – recept napsal lékař A

a) P(A) = 0,7 · 0,01 + 0,3 · 0,02 = 0,013

b)

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}006}{0{,}006 + 0{,}007} \doteq 0{,}4615$$

Příklad 27:
Oil Exploration podnikla zoufalý hazardní pokus – veškeré zbylé fondy vložila na 12 pokusných vrtů. Šance, že vrt narazí na ropu, je u všech vrtů 20% a jednotlivé vrty jsou navzájem nezávislé. Před bankrotem může firmu zachránit jen úspěch tří a více vrtů. Jaké je šance?

Bi(n, π)

n = 12
π = 0,2
k $\geq$ 3

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot \pi^{i} \cdot (1-\pi)^{n-i}$$

P(X≥3) = 1 - (P(X=0)+ P(X=1) + P(X=2)) $\doteq$ 1 - 0,5583 = $\underline{\underline{0,4417}}$

Příklad 12:
Univerzální pneumatiky mají průměrnou životnost 56 000 mil se směrodatnou odchylkou 8 000 mil a normální rozdělení.
a) Jaká je pravděpodobnost, že daná pneumatika vydrží 50 000 mil a více?
b) Kolik procent pneumatik vydrží méně než 50 000 mil?
c) Jaká je pravděpodobnost, že pneumatika bude mít životnost od 50 000 do 60 000 mil?
d) Jaká je pravděpodobnost, že pneumatika vydrží více než 80 000 mil?

N(μ, σ^2)

μ = 56 000
σ = 8 000

a) $$P(X > 50000) = P(U > \frac{50000-56000}{8000}) = P(U > -0{,}75) = 1-\phi(-0{,}75) = \phi(0{,}75) \doteq \underline{\underline{0{,}77337}}$$

b) $$P(X < 50000) \doteq 1-0{,}77337 = 0{,}22663 \doteq \underline{\underline{22{,}7\%}}$$

c)
$$P(50000 < X < 60000) = P\left(\frac{50000-56000}{8000} < U < \frac{60000-56000}{8000}\right) = \phi(0{,}5) - \phi(-0{,}75) \doteq$$

$$= \phi(0{,}5) - (1-\phi(0{,}75)) \doteq 0{,}77337 + 0{,}69146 - 1 = \underline{\underline{0{,}46483}}$$

d) $$P(X > 80000) = P(U > \frac{80000-56000}{8000}) = P(U > 3) = 1-\phi(3) \doteq 1-0{,}99865 = \underline{\underline{0{,}00135}}$$

Příklad 28:
Pojišťovna uzavřela 100 životních pojistek s osobami určitého věku, o nichž je v úmrtnostních tabulkách zjištěna pravděpodobnost dožití dalších deseti let 0,85. Jednorázové pojistné činí 1600 Kč a v případě úmrtí do deseti let vyplatí pojišťovna pozůstalým 10 000 Kč.
Jaký zisk z těchto pojistek může za daných podmínek pojišťovna očekávat?

zisk x	P(X)	E(X) pro 1 x · P(X)
1 600,-	0,85	1 360
-8 400,-	0,15	-1 260
	suma:	**100**

Zisk = zisk pro 1 * počet pojistek = 100 · 100 = 10 000,- Kč

Příklad 14:
Pracovník pro odbyt u velké firmy na výrobu léčiv navštíví ročně 3 velkoprodejny s farmaky s 80% pravděpodobností, že sjedná kontrakt. Nechť X je součet všech prodejů za rok (0,1,2 nebo 3).
a) Sestavte tabulku rozdělení pravděpodobností p(x).
b) Jaká je pravděpodobnost, že sjedná aspoň dva kontrakty?

Bi(n,π)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \pi^{k} \cdot (1-\pi)^{n-k}$$

a)

sjednaných obchodů	P(x)
0	0,008
1	0,096
2	0,384
3	0,512
suma:	1

b) P(x ≥ 2) = P(x=2) + P(x=3) = 0,384 + 0,512 = 0,896

Příklad 23:
Z časového snímku určité montážní operace vyplývá, že bylo provedeno n =12 pozorování, zjištěný průměr doby trvání operace je průměr x = 44 sec. a směrodatná odchylka s = 4 sec.
Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro očekávanou délku montáže.

$n = 12$
$\bar{x} = 44$
$\sigma = 4$
$\alpha = 0,05$

$$\bar{x} \pm \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$44 \pm \left(u_{0,975} \cdot \frac{4}{\sqrt{12}} \right) = 44 \pm 1,96 \cdot \frac{4}{2\sqrt{3}} = 44 \pm 2,263$$

(41,737; 46,263)

Příklad 29:
Při průjezdu přes most byla kontrolována rychlost jízdy 100 vozidel. Bylo zjištěno, že 24 vozidel překročilo povolenou rychlost.
Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro podíl vozidel překračujících na mostě povolenou rychlost.

$n = 100$
$x = 24$
$\alpha = 0{,}05$

$$p \pm \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \right)$$

$$p = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

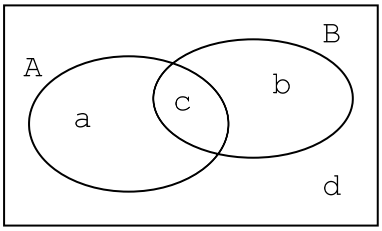
$$P(1 \hat{-} P) = p(1-p) = 0{,}24 \cdot 0{,}76 = 0{,}1824$$

$u_{0,975} = 1{,}96$

$$24 \pm \left(1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1824}{100}} \right) \doteq 24 \pm 8{,}37\% = 24 \pm 8{,}37 \doteq 24 \pm 8$$

$\underline{\underline{(16;\ 32)}}$

Příklad 6:
Z populace USA v roce 1980 bylo:
10% z Kalifornie
6% španělského původu
2% španělského původu a z Kalifornie.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný Američan bude:
a) z Kalifornie nebo španělského původu
b) ani z Kalifornie, ani španělského původu
c) španělského původu, ale ne z Kalifornie?



A – je z Kalifornie
B – je španělského původu

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = a + c + b =$
$= 0{,}1 + 0{,}06 - 0{,}02 = \underline{0{,}14}$

b) $\overline{A} \cap \overline{B} = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = d = 1 - (A \cup B) = 1 - 0{,}1 - 0{,}06 + 0{,}02 = \underline{\underline{0{,}86}}$

c) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = b = 0{,}06 - 0{,}02 = \underline{\underline{0{,}04}}$

Příklad 7:

Autobusy městské dopravy odjíždějí ze stanice v sedmiminutových intervalech.
Cestující může přijít na stanici v libovolném okamžiku.

a) Jaká je pravděpodobnost, že bude čekat méně než 2 minuty?

b) Jaká je střední hodnota a rozptyl doby jeho čekání na odjezd ze stanice?

$0 < x < 7$

$f(x) = \frac{1}{7}$

a) $P(X \geq 5) = \int_5^7 \frac{1}{7} dx = \frac{1}{7}[x]_5^7 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \doteq \underline{\underline{0{,}2857}}$

b) $E(X) = \sum_{x \in \Omega_x} x \cdot P(x) = \int_{(\Omega_x)} x \cdot f(x)dx = \int_0^7 x \cdot \frac{1}{7} dx = \frac{1}{7}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3{,}5}}$

$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 = 16{,}33\overline{3} - 12{,}25 = \underline{\underline{4{,}083\overline{3}}}$

$E(X^2) = \int_0^7 x^2 \frac{1}{7} dx = \frac{1}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^7 = \frac{49}{3} = 16{,}33\overline{3}$

$[E(X)]^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$

Příklad 22:

Předpokládáme, že měsíční výdaje domácnosti na určité potravinářské zboží mají normální rozdělení se střední hodnotou 90 Kč a směrodatnou odchylkou 14 Kč. Stanovte pravděpodobnost překročení hranice 100 Kč

a) pro výdaje náhodně vybrané domácnosti,

b) pro <u>průměrné výdaje</u> třiceti náhodně vybraných domácností.

(Věta Lindeberg - Lévy o výběrovém průměru)

$\mathbf{N(\mu,\sigma^2)}$

$E(X) = \mu = 90$

$\sqrt{D(X)} = \sigma = 14$

a) $\mathbf{N(90,14^2)}$

$P(X > 100) = P\left(U > \frac{100-90}{14}\right) = 1 - \phi(0{,}714285) \doteq 1 - 0{,}7625 = \underline{\underline{0{,}2375}}$

b) $\bar{x} \sim N(90, \frac{14^2}{30})$

$P(X > 100) = P\left(U > \frac{100-90}{\frac{14}{\sqrt{30}}}\right) \doteq 1 - \phi(3{,}9124) \doteq 1 - 0{,}99995 = \underline{\underline{0{,}00005}}$