

# Eulerovské grafy

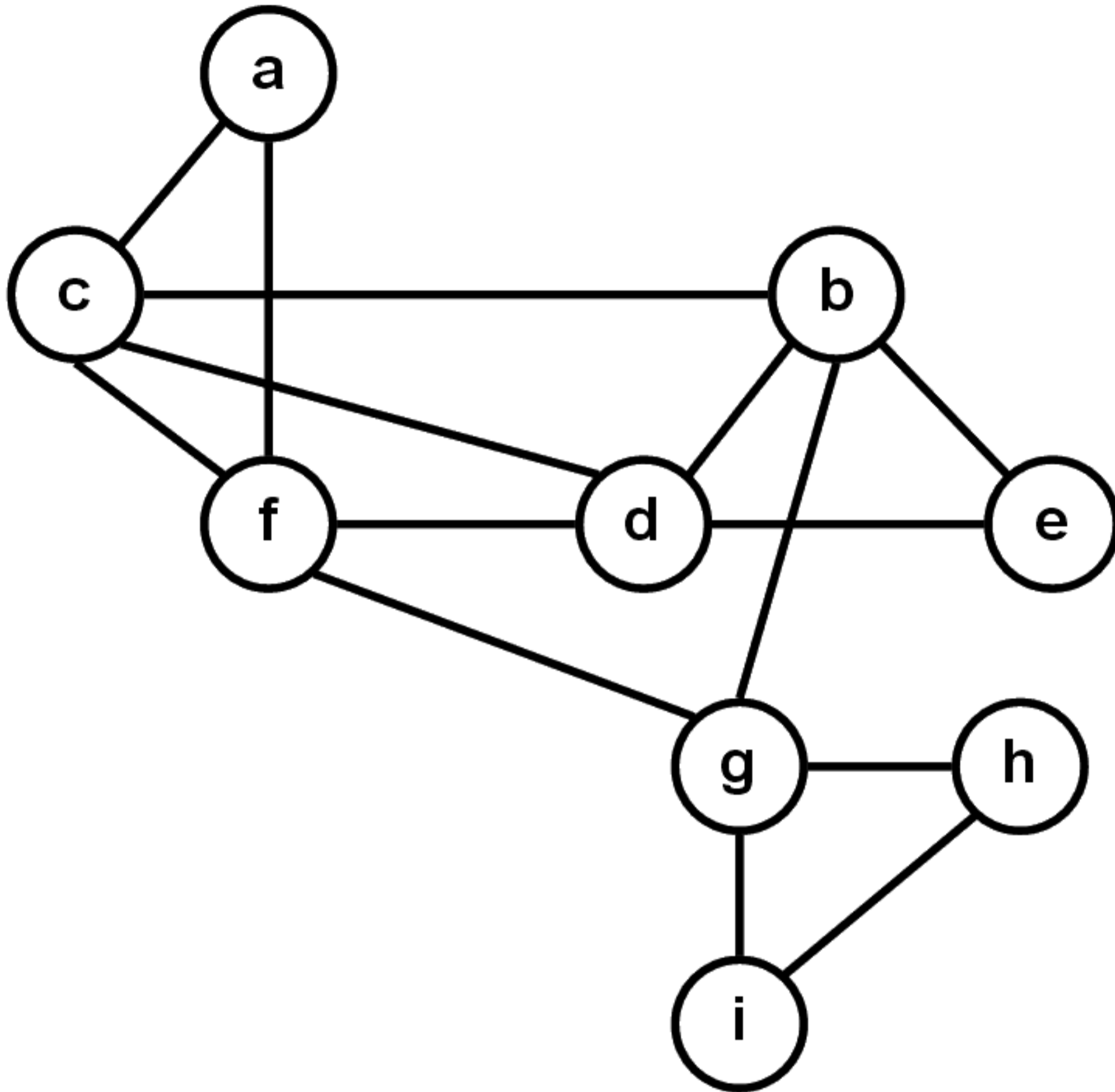
Petr Voborník

# Pojmy

- Eulerovský tah
- Eulerovský graf
- Uzavřený Eulerovský tah
- Sudý graf

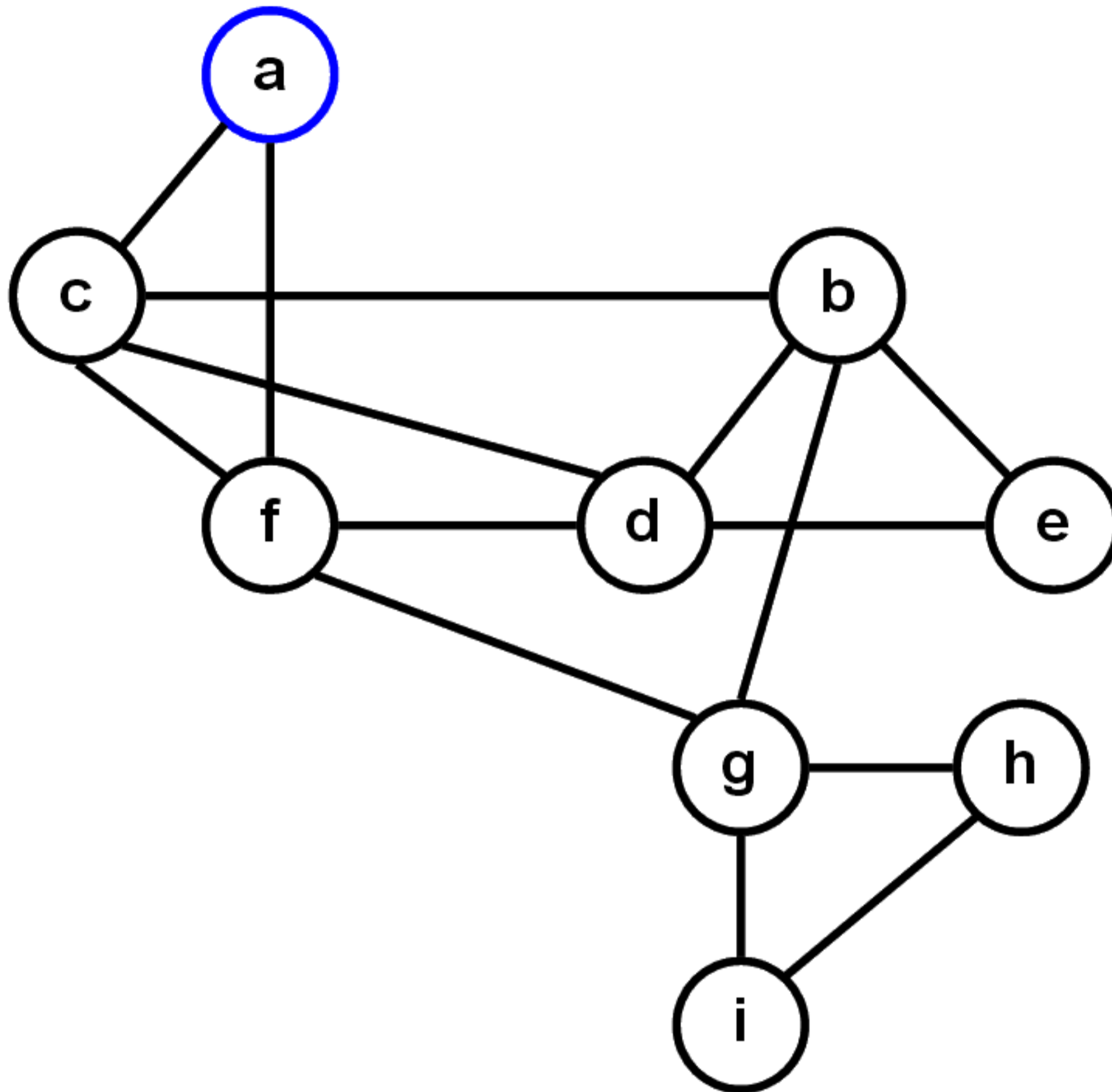
# Algoritmus nalezení Eulerovského tahu

1. Zjistíme je-li graf Eulerovský
2. Začneme v libovolném vrcholu lich. stupně a zapíšeme jej do zásobníku LIFO
3. Z vrcholu se přesuneme po neobarvené hraně do dalšího, hranu obarvíme červeně a vrchol přidáme do LIFO
4. Ze slepé uličky se vrátíme, hranu obarvíme zeleně a vrchol přesunem z LIFO do ET
5. Body 3 a 4 opakujeme, dokud nejsou všechny hrany obarveny zelenou a zbytek LIFO přidáme do ET



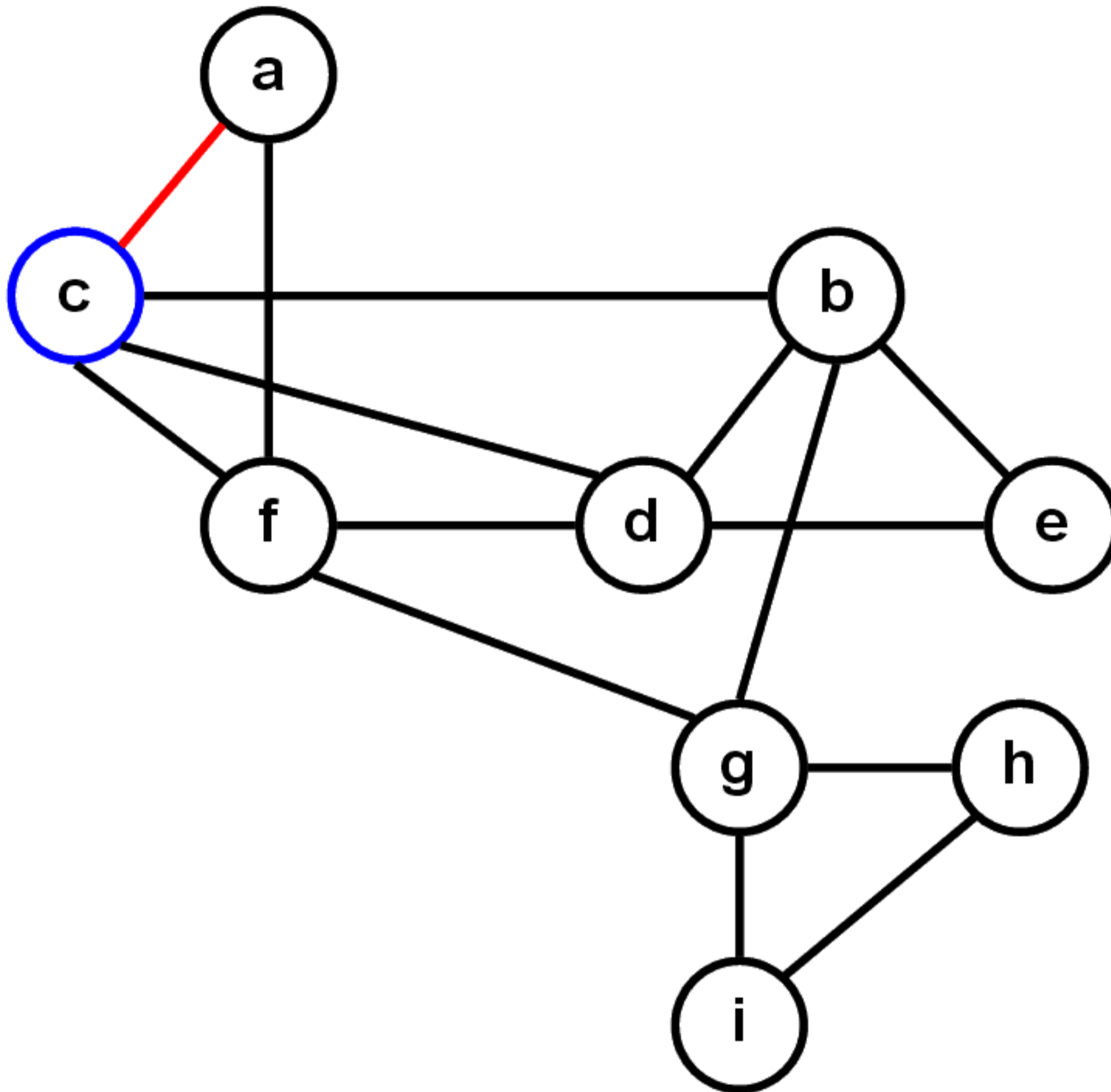
LIFO:

ET:



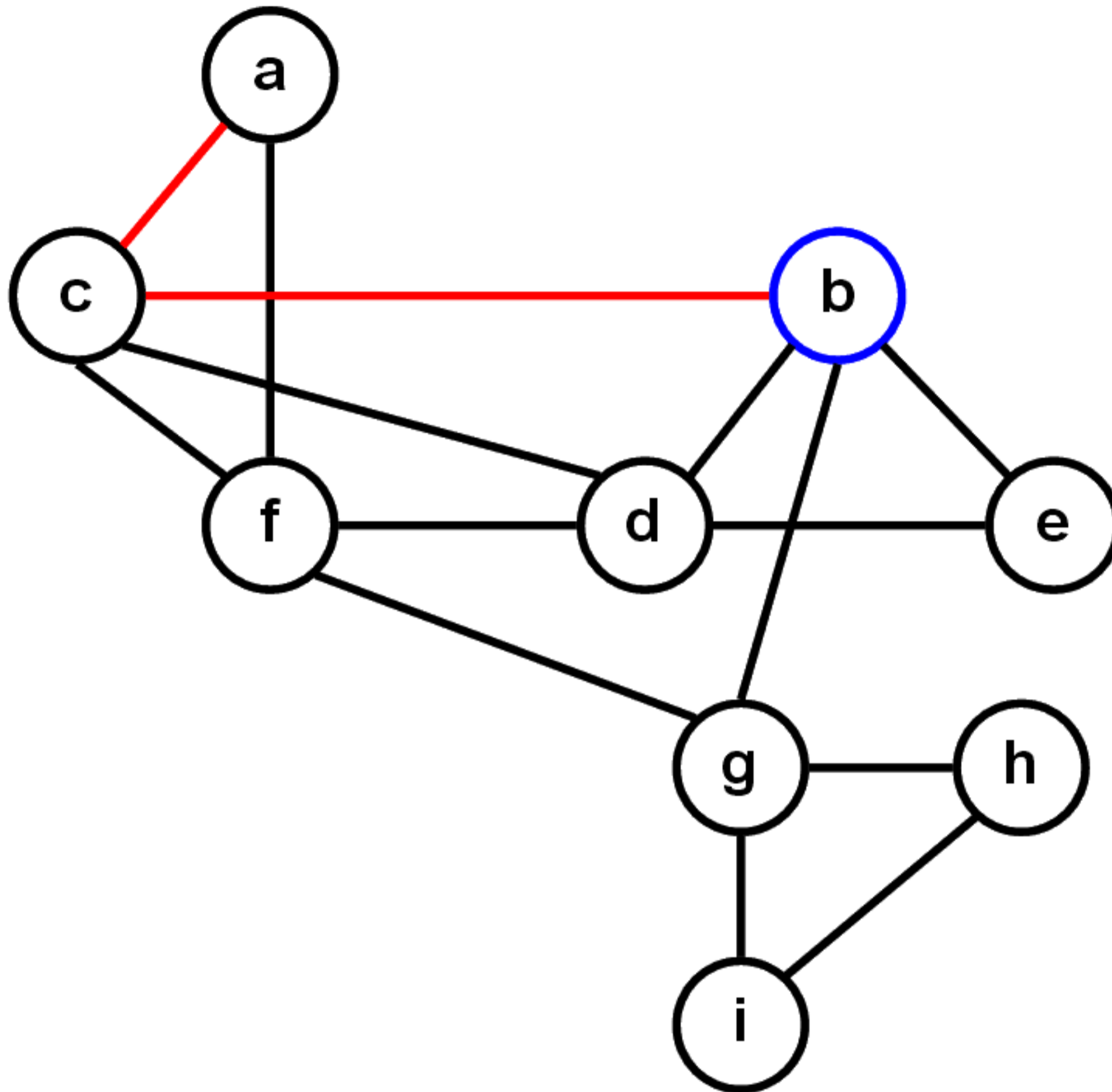
LIFO: a,

ET:



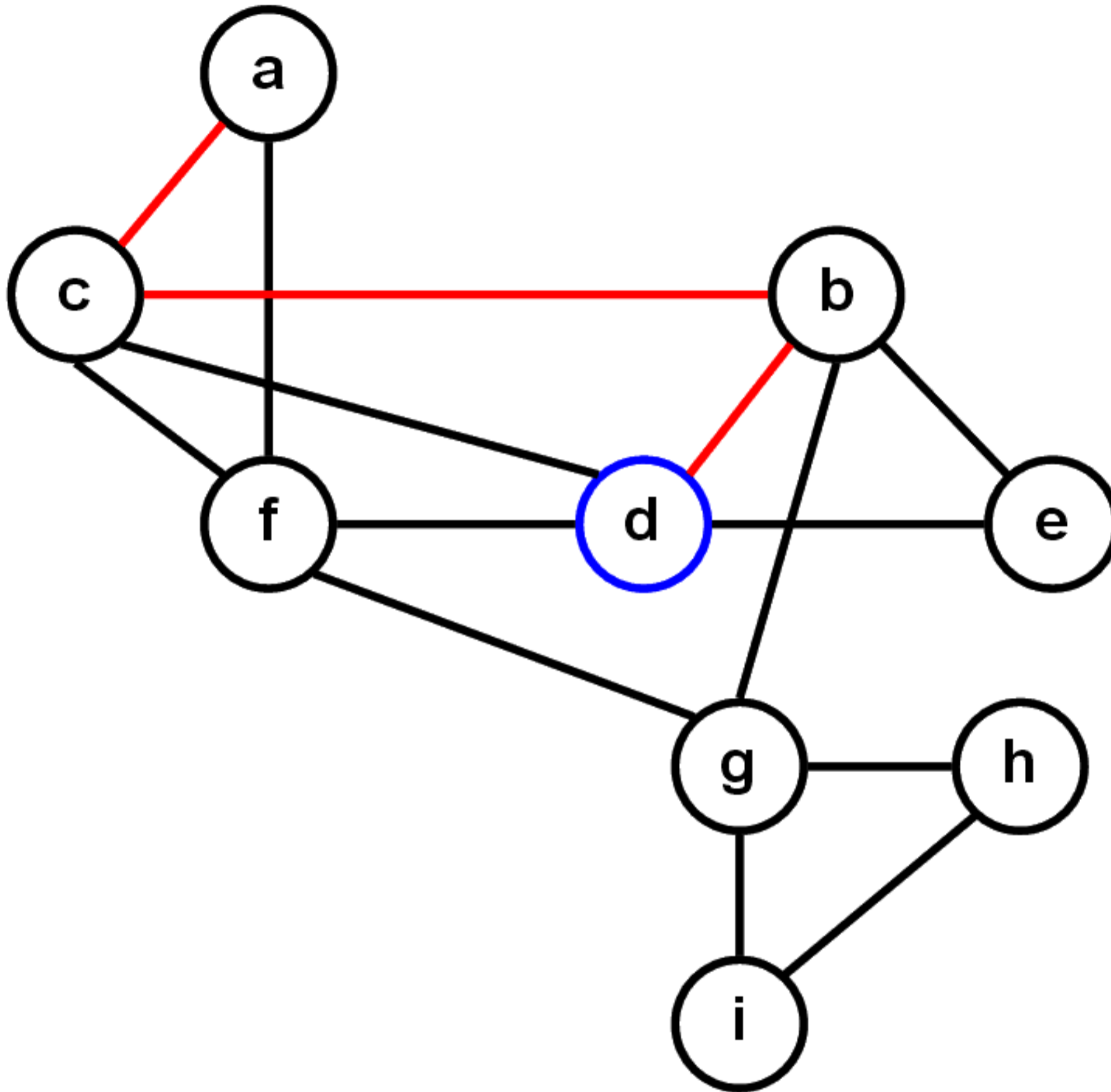
LIFO: a, c,

ET:



LIFO: a, c, b,

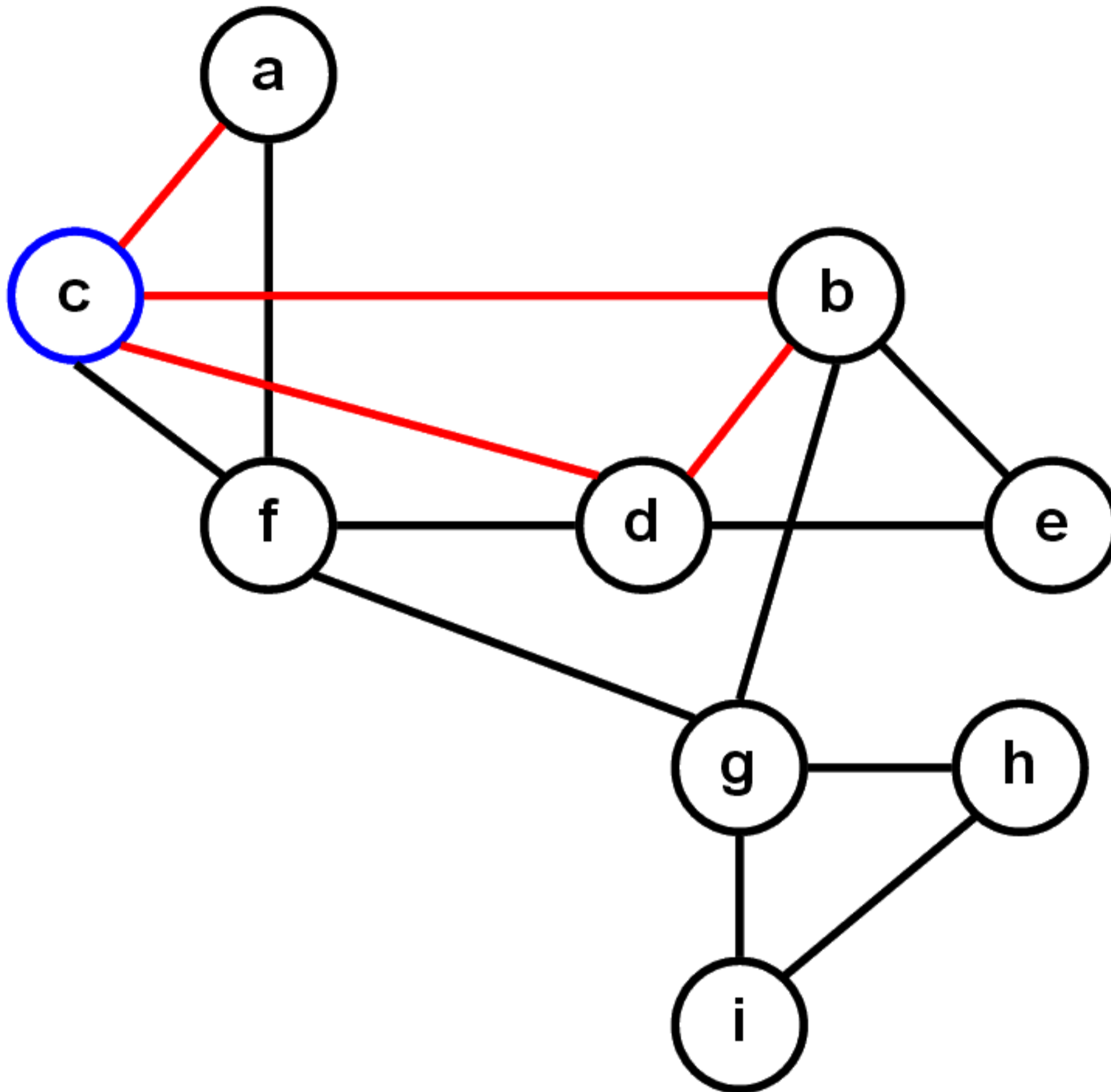
ET:



LIFO: a, c, b, d,

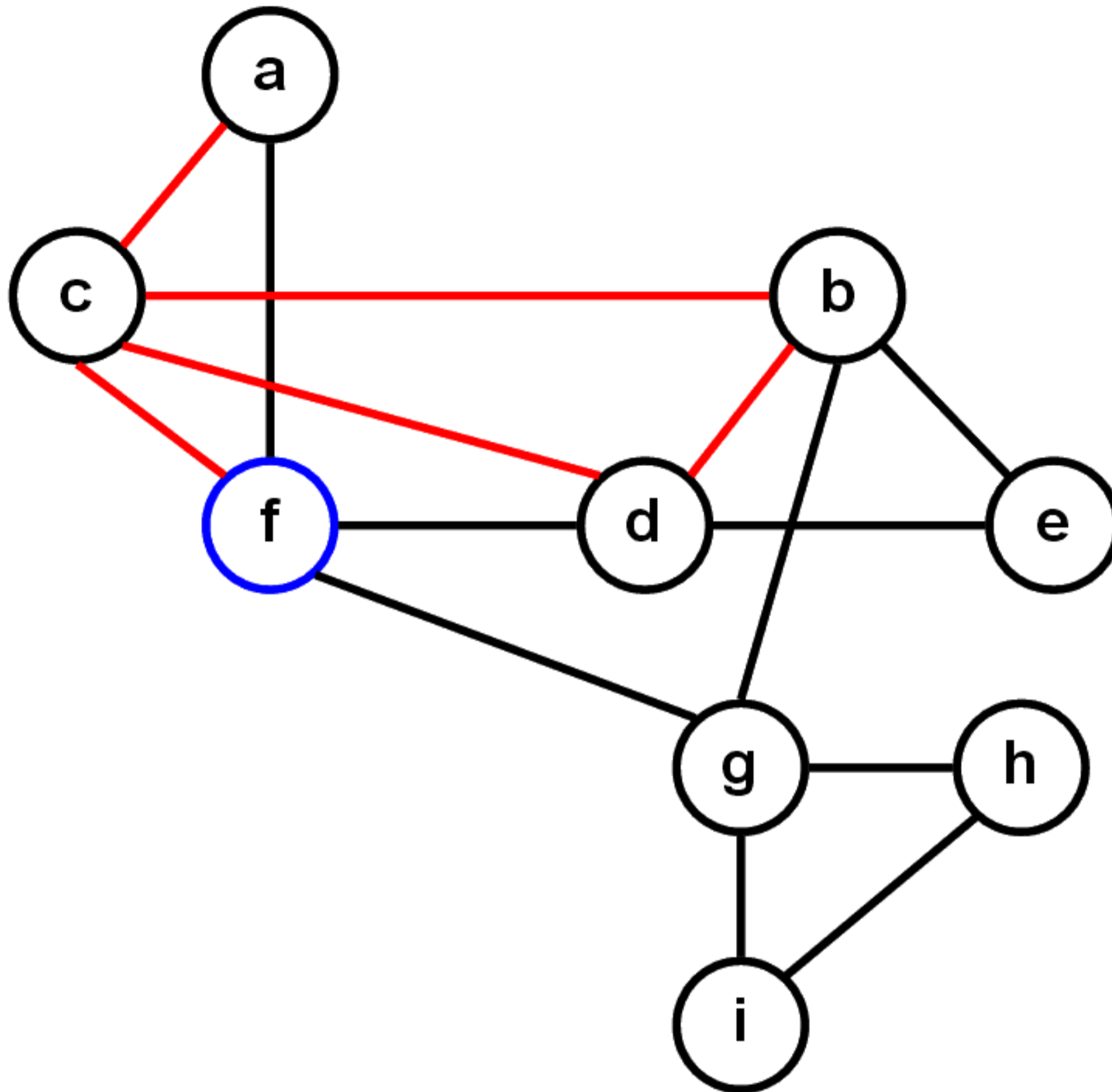
ET:





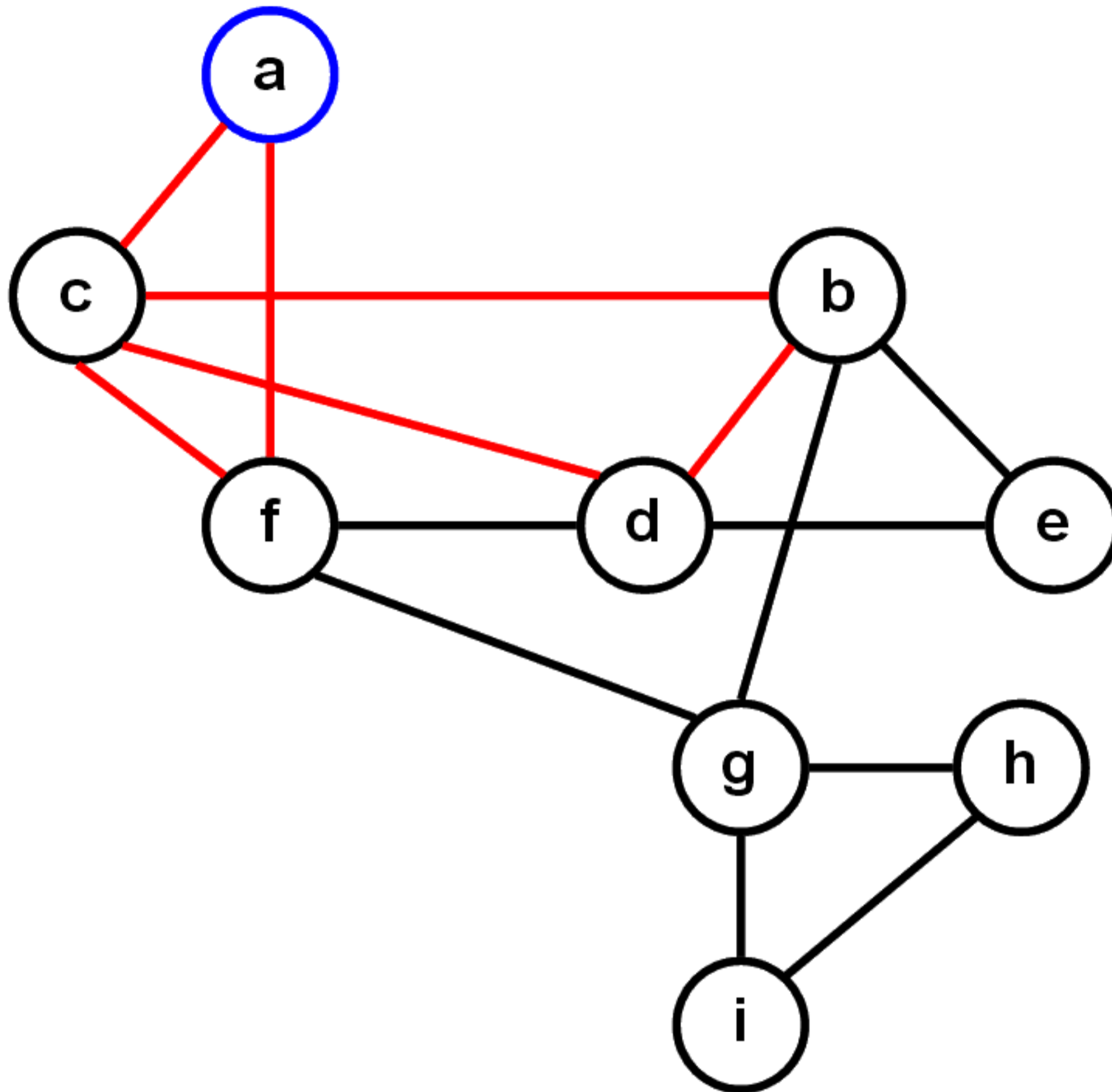
LIFO: a, c, b, d, c,

ET:



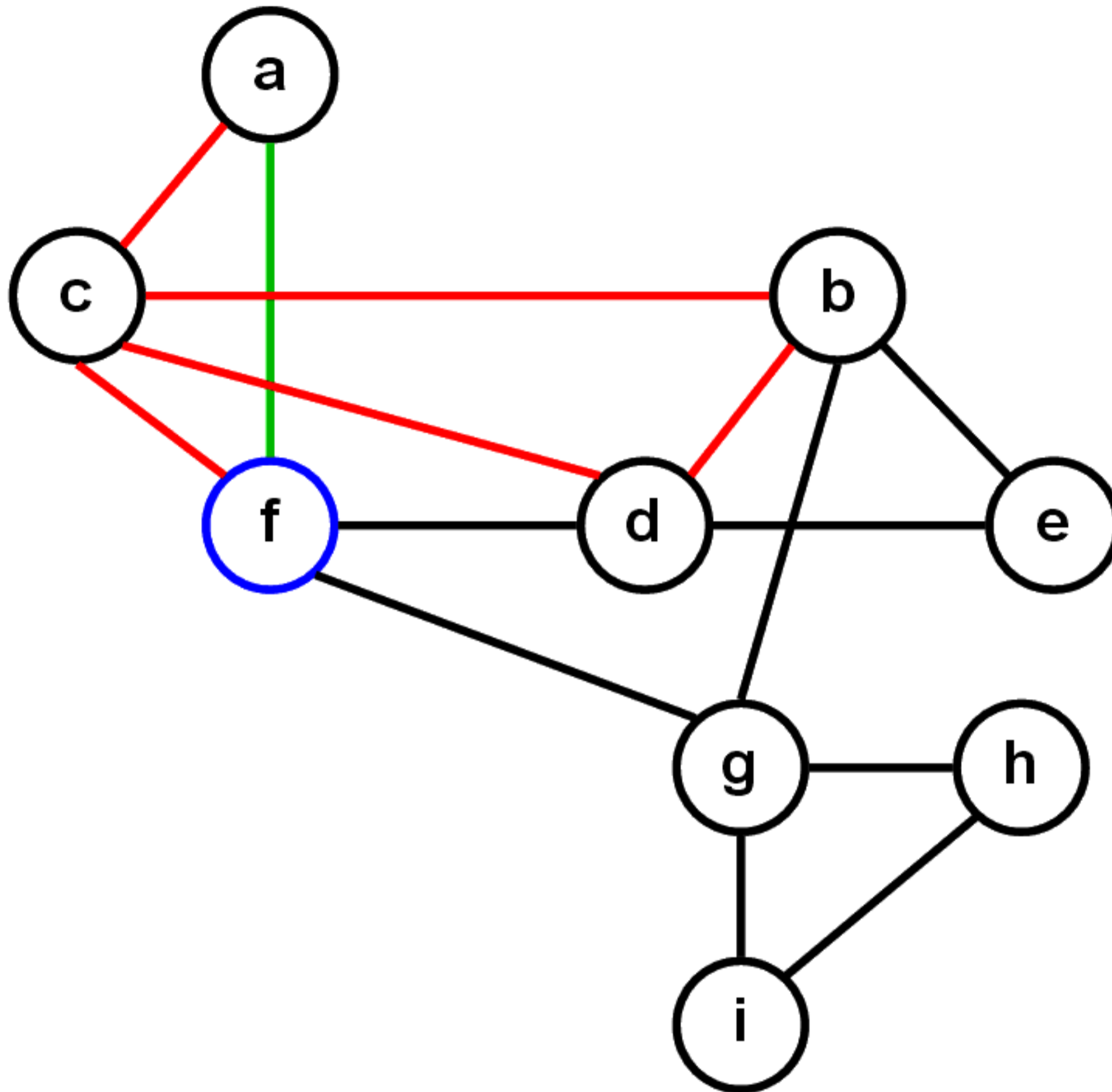
LIFO: a, c, b, d, c, f,

ET:



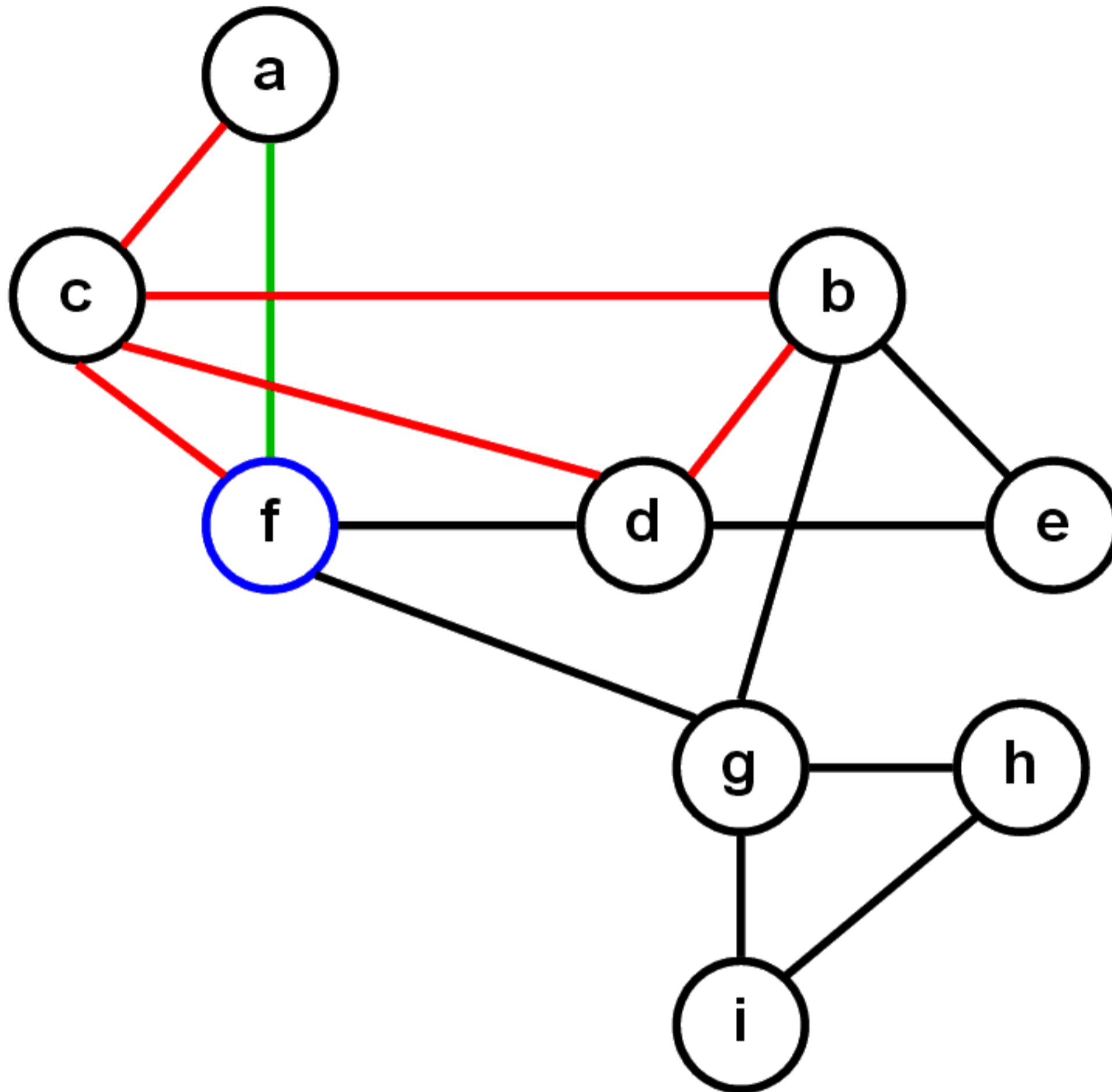
LIFO: a, c, b, d, c, f, a,

ET:



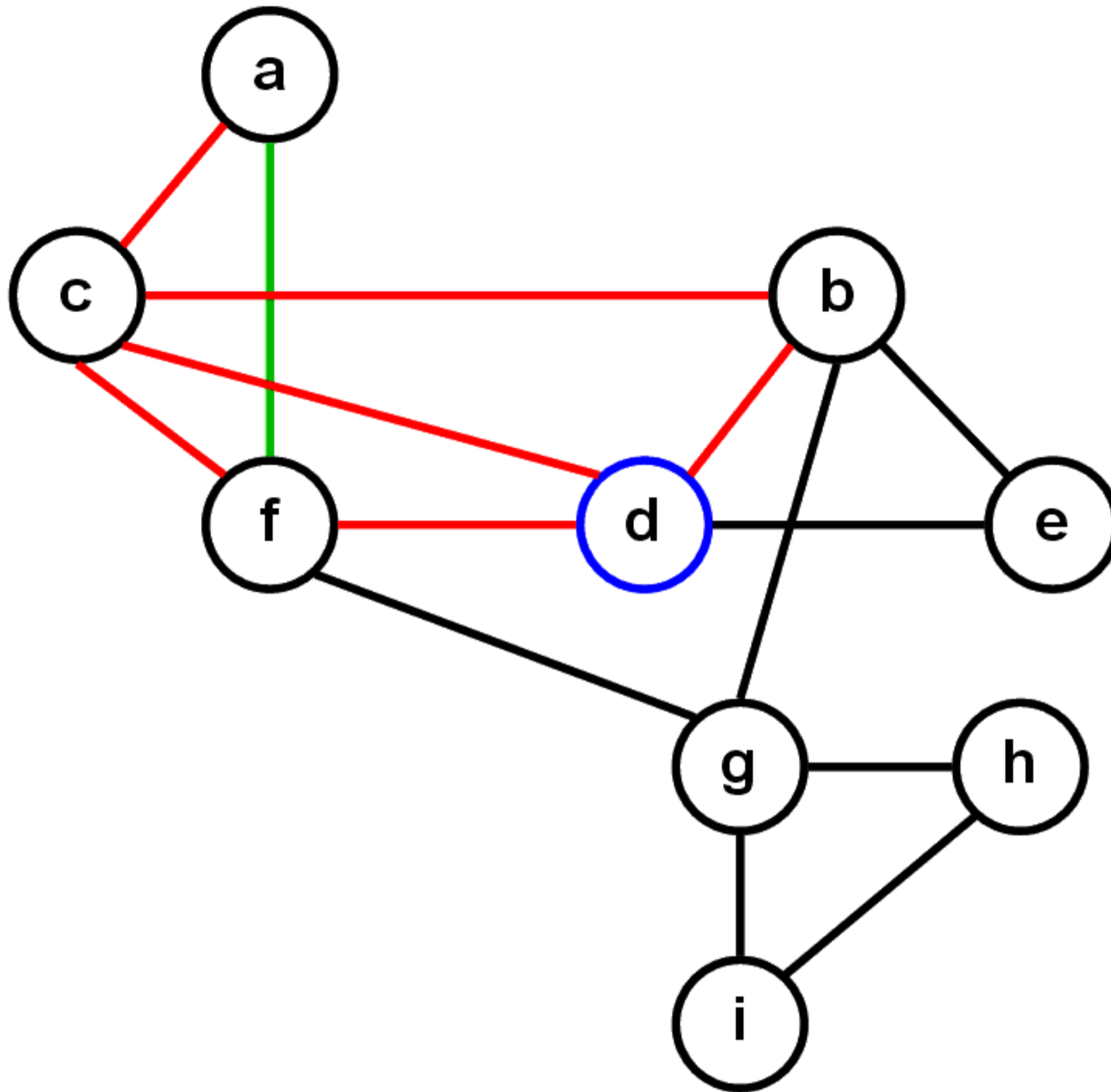
LIFO: a, c, b, d, c, f, a,

ET:



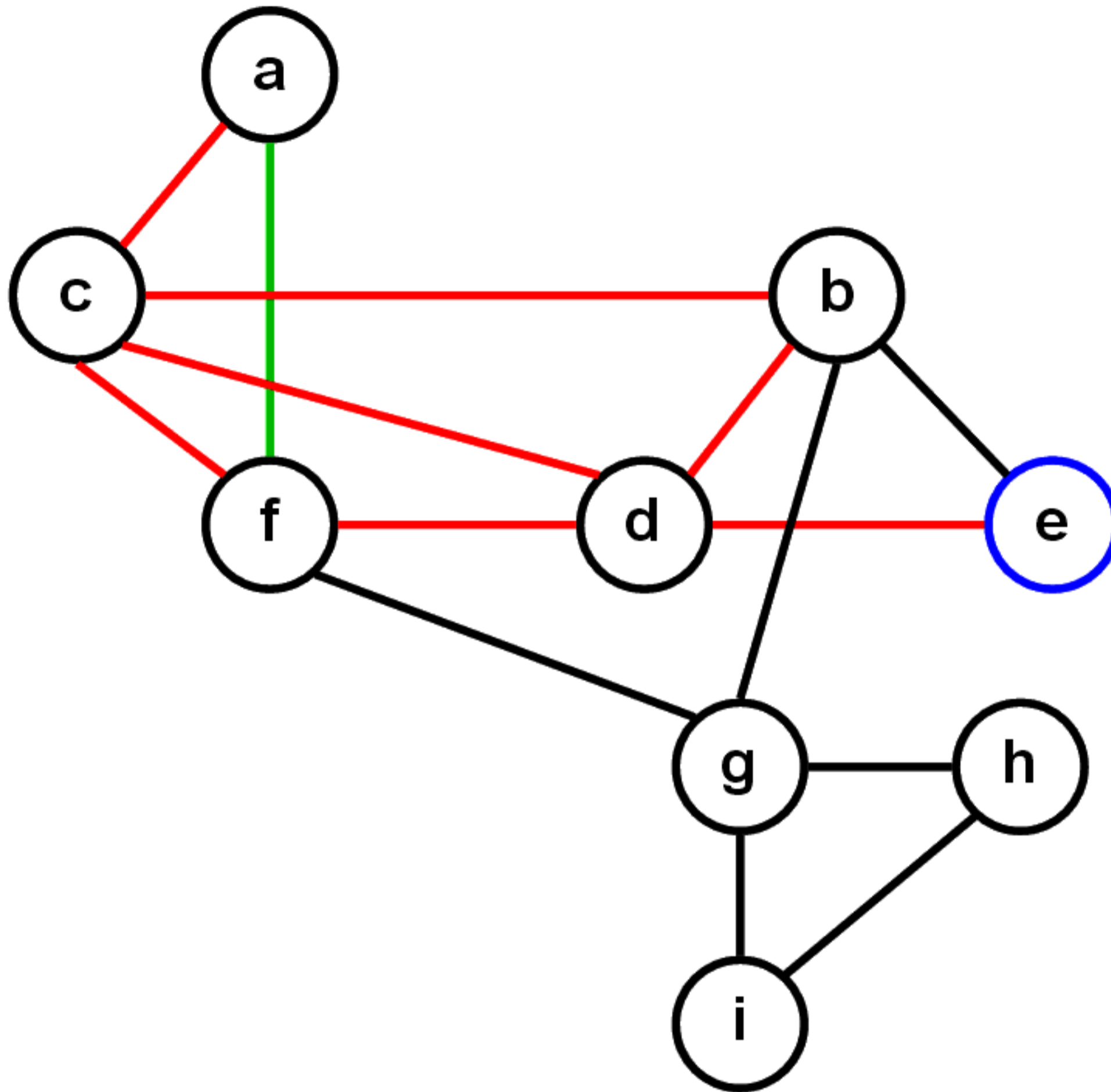
LIFO: a, c, b, d, c, f,

ET: a,



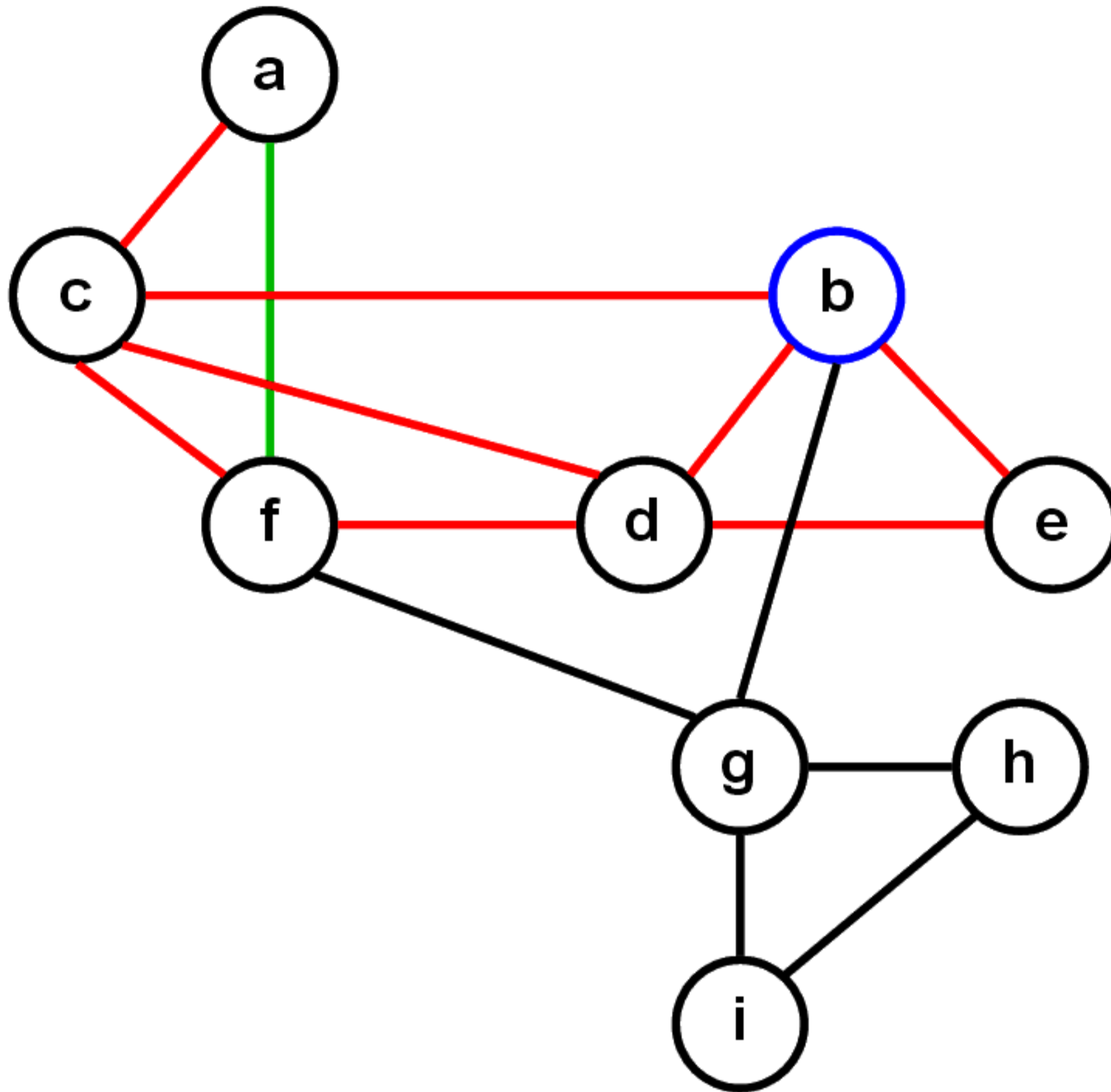
LIFO: a, c, b, d, c, f, d,

ET: a,



LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e,

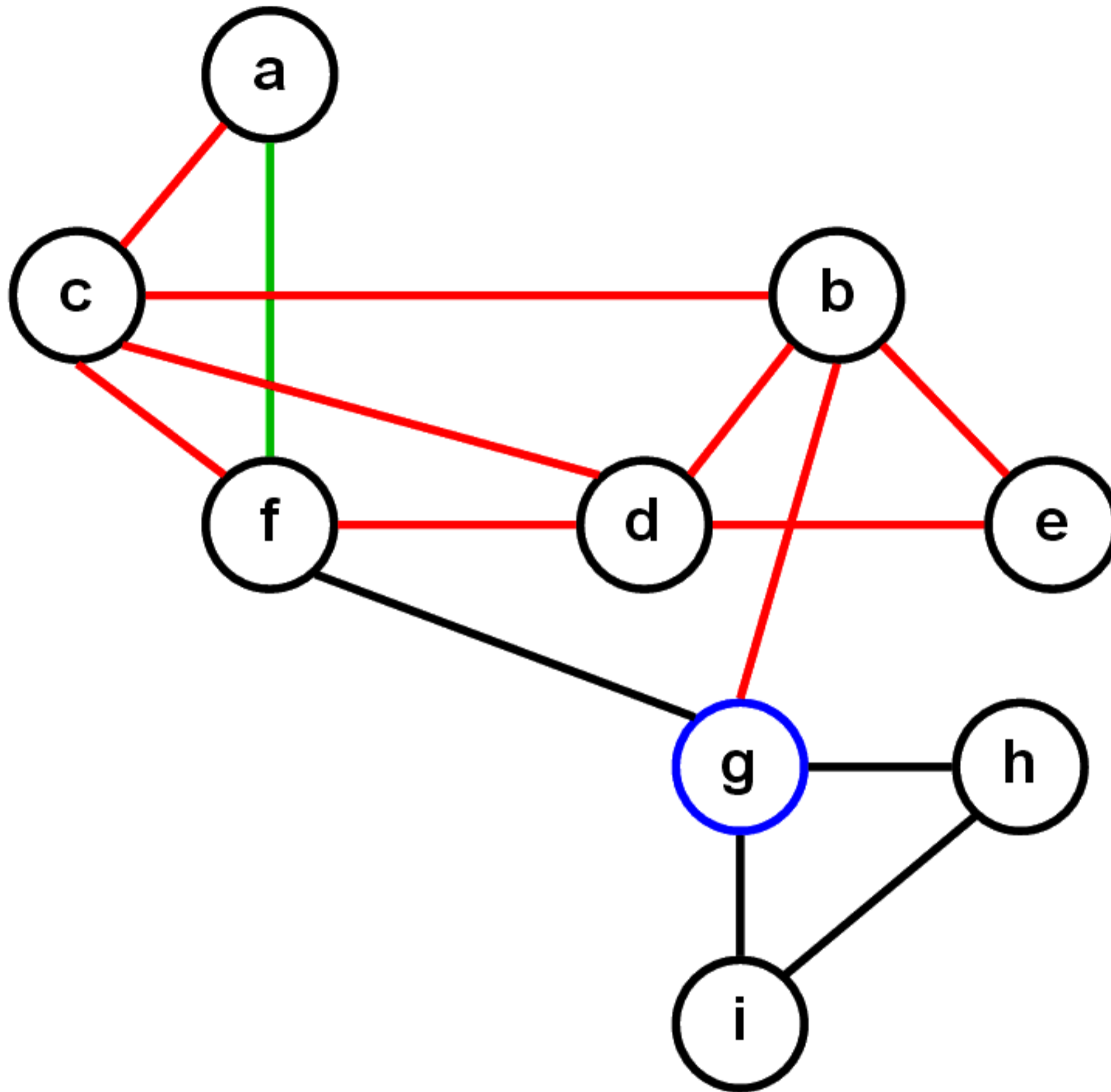
ET: a,



LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b,

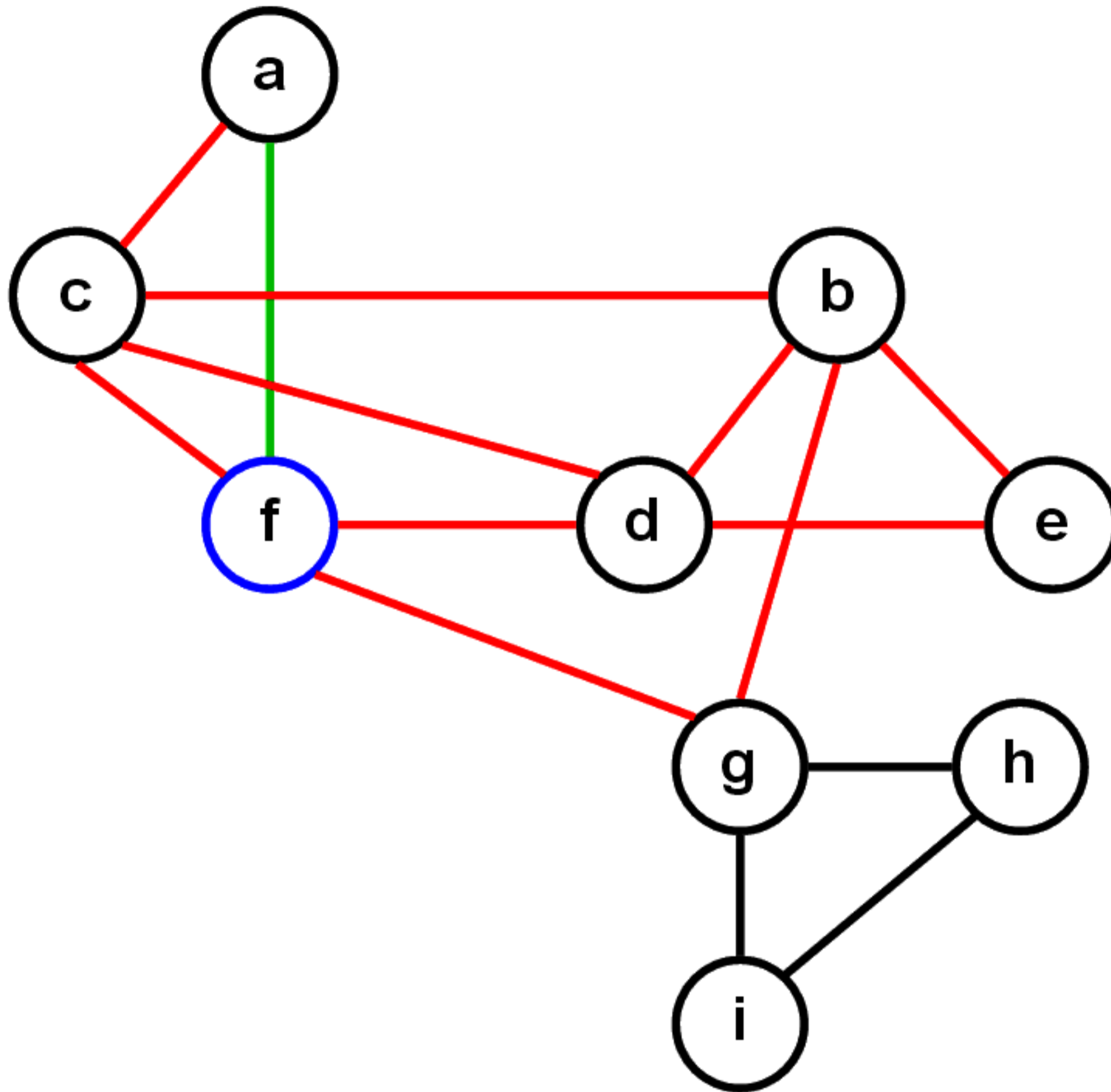
ET: a,





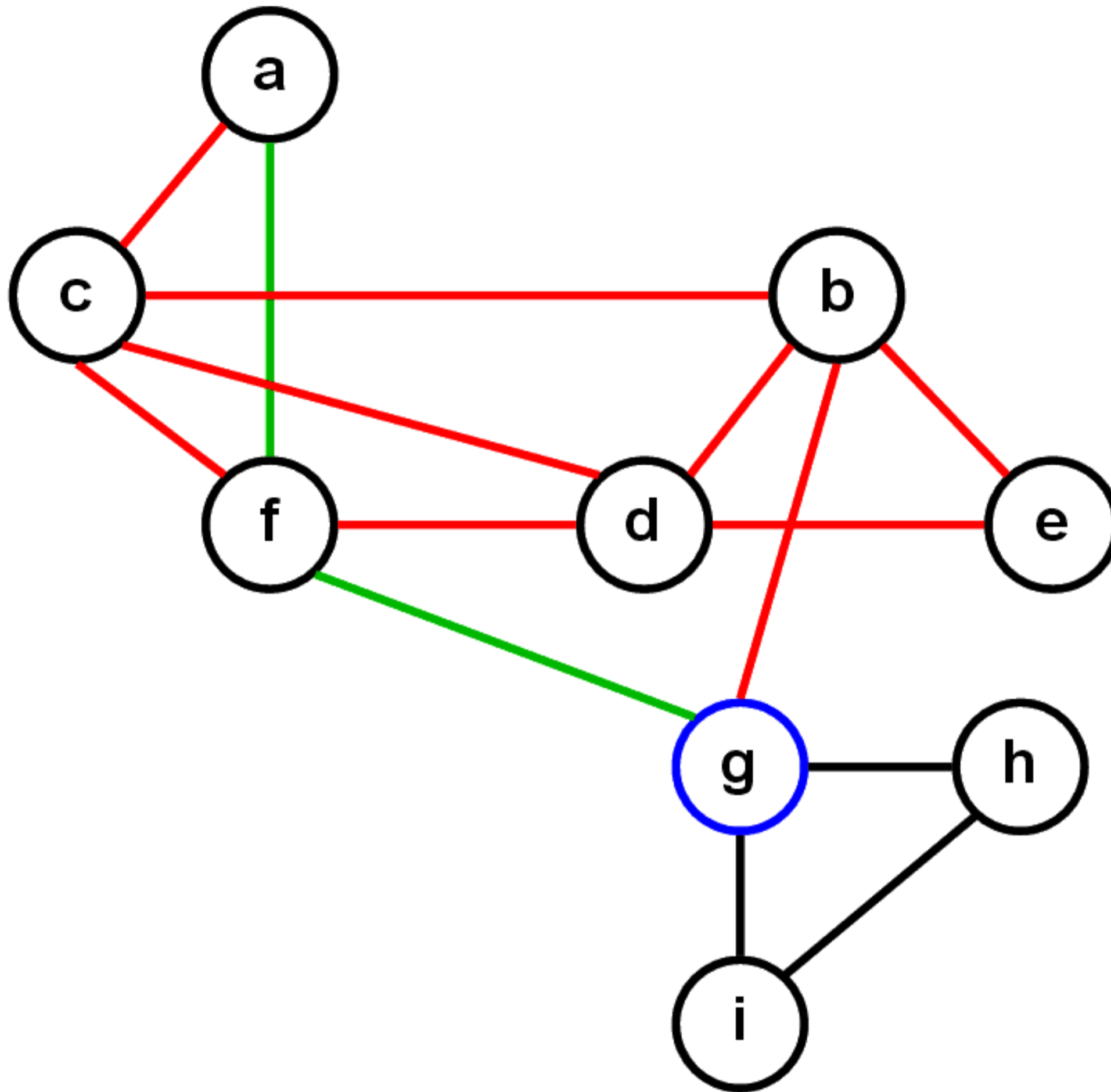
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g,

ET: a,



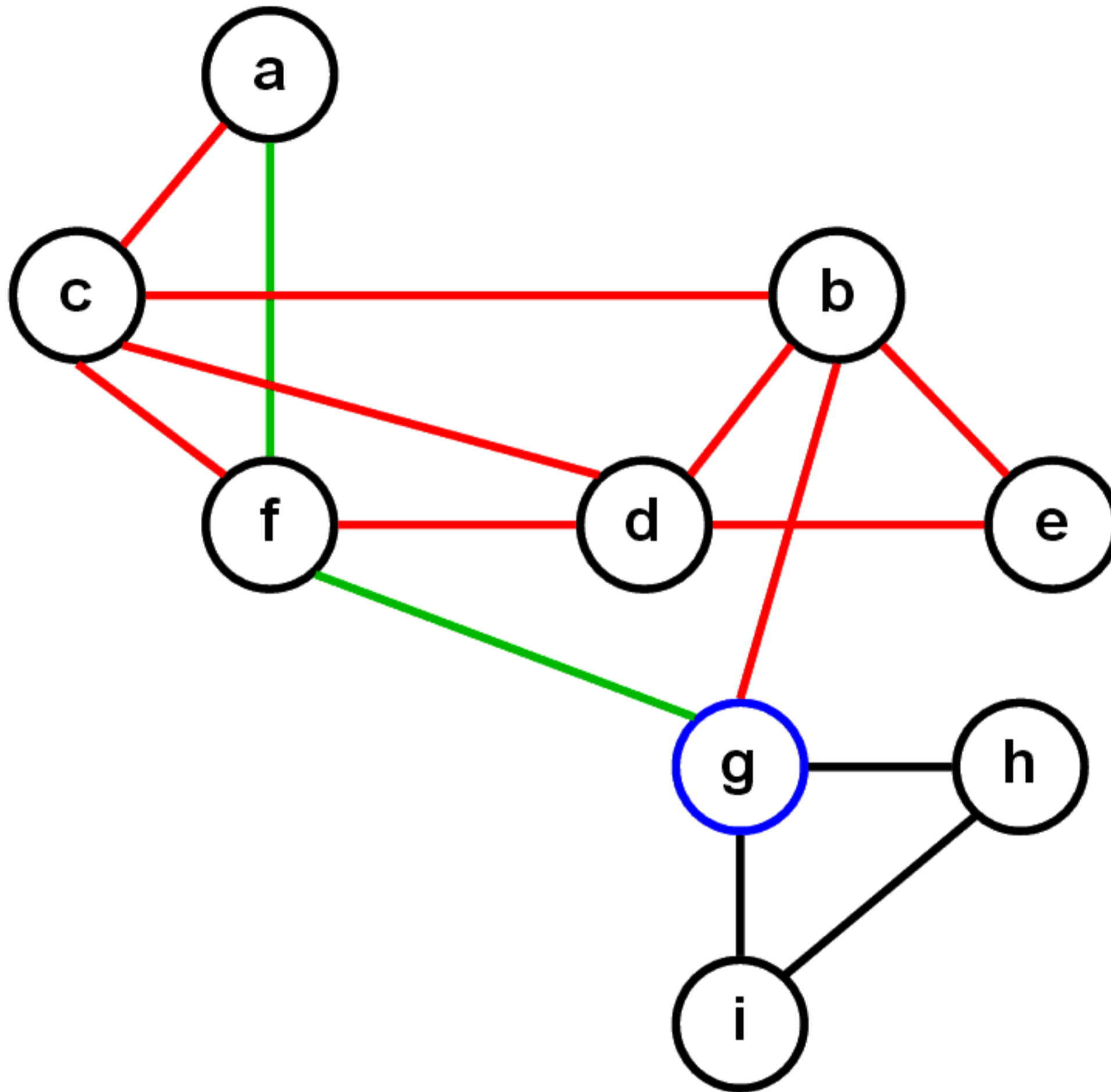
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, f,

ET: a,



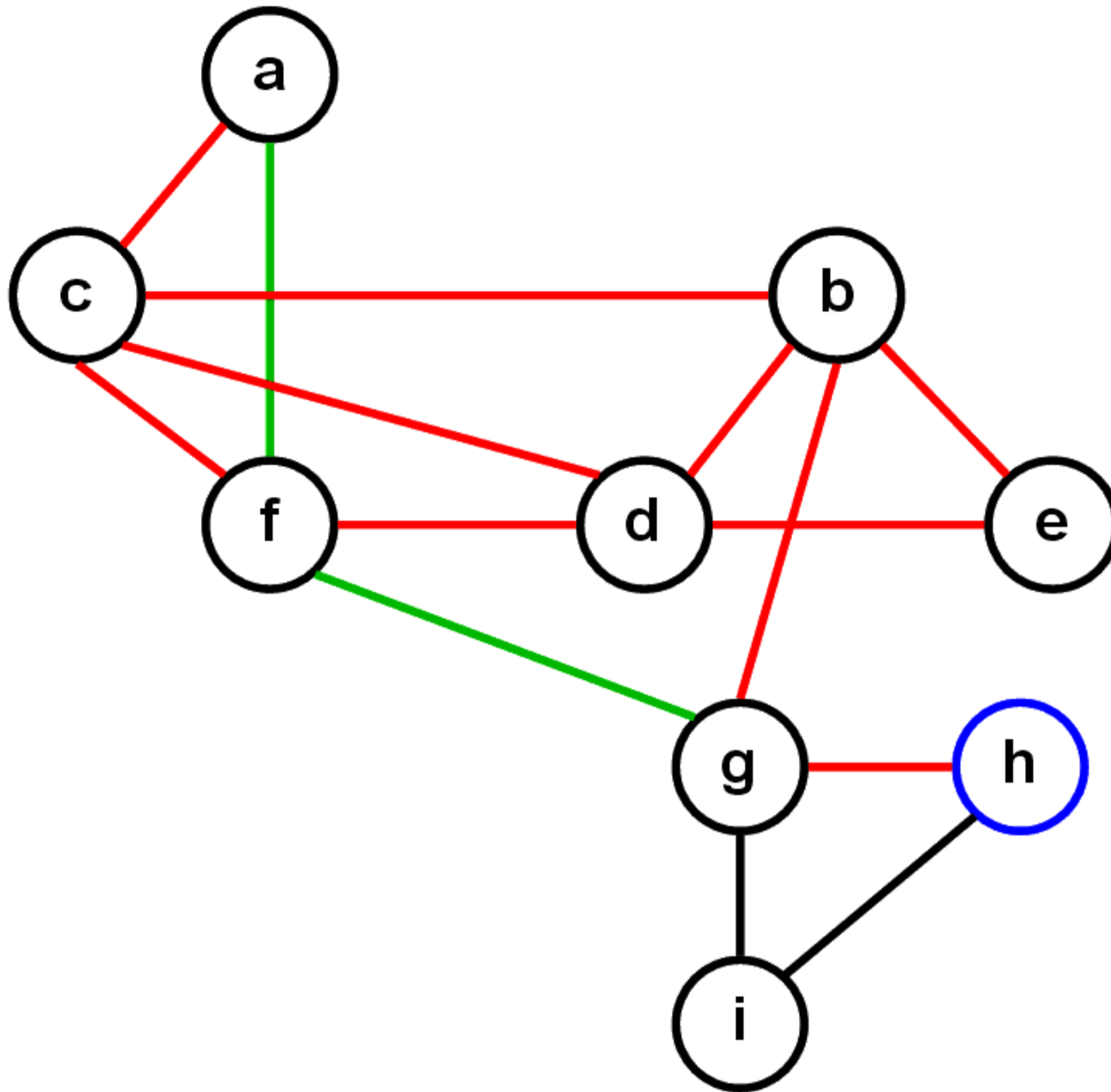
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, f,

ET: a,



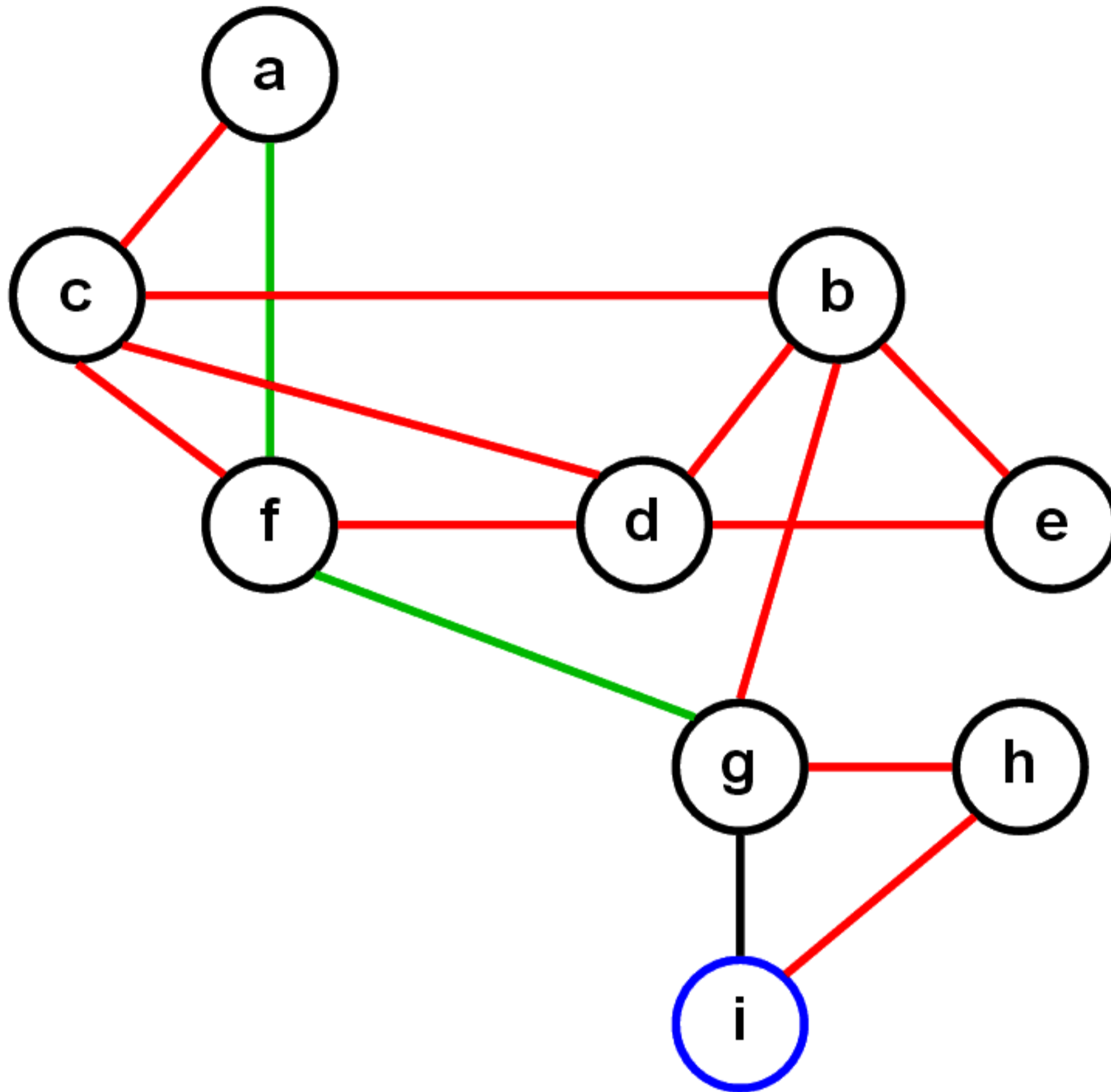
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g,

ET: a, f,



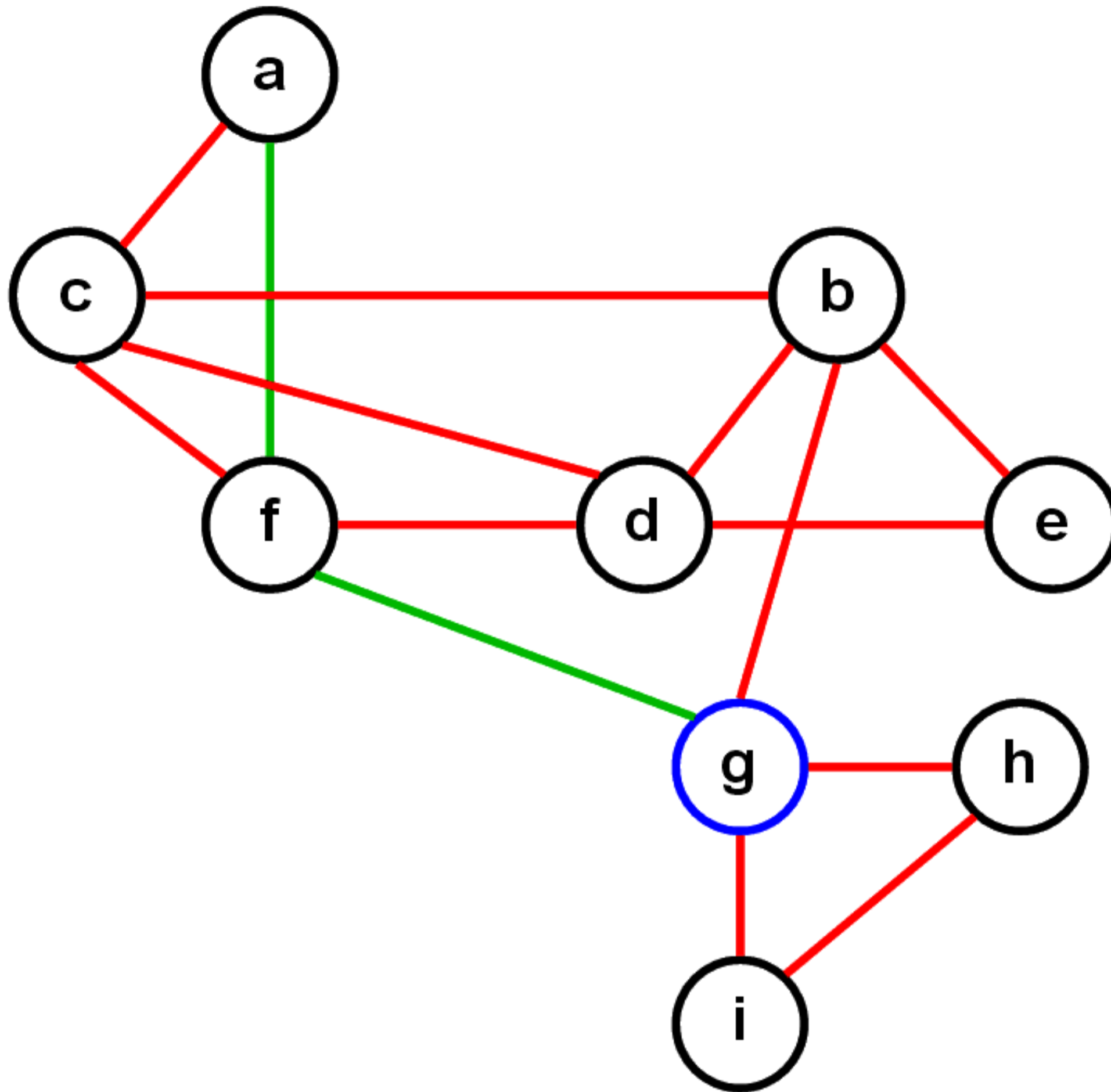
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, h,

ET: a, f,



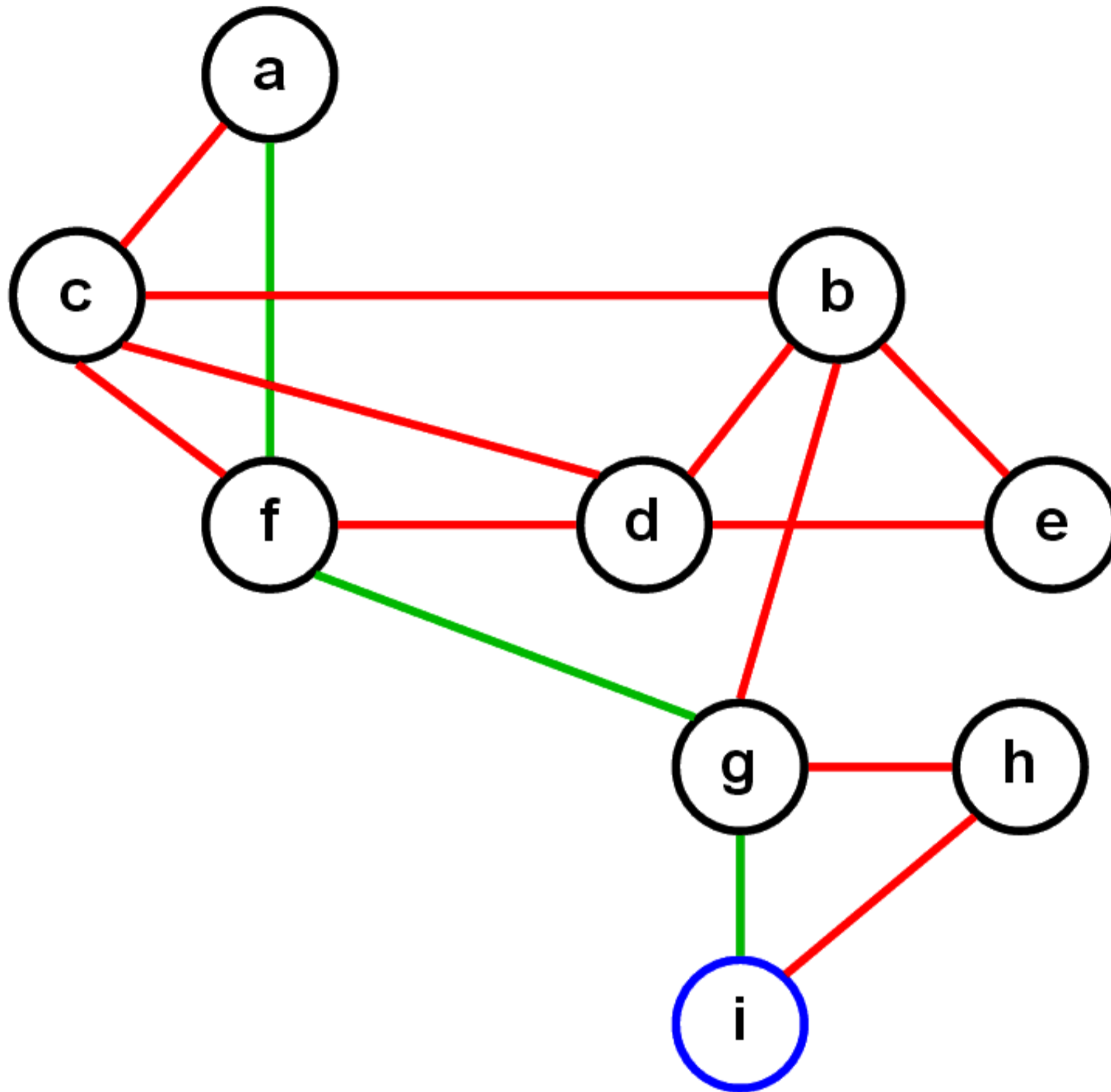
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, h, i,

ET: a, f,



LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, h, i, g

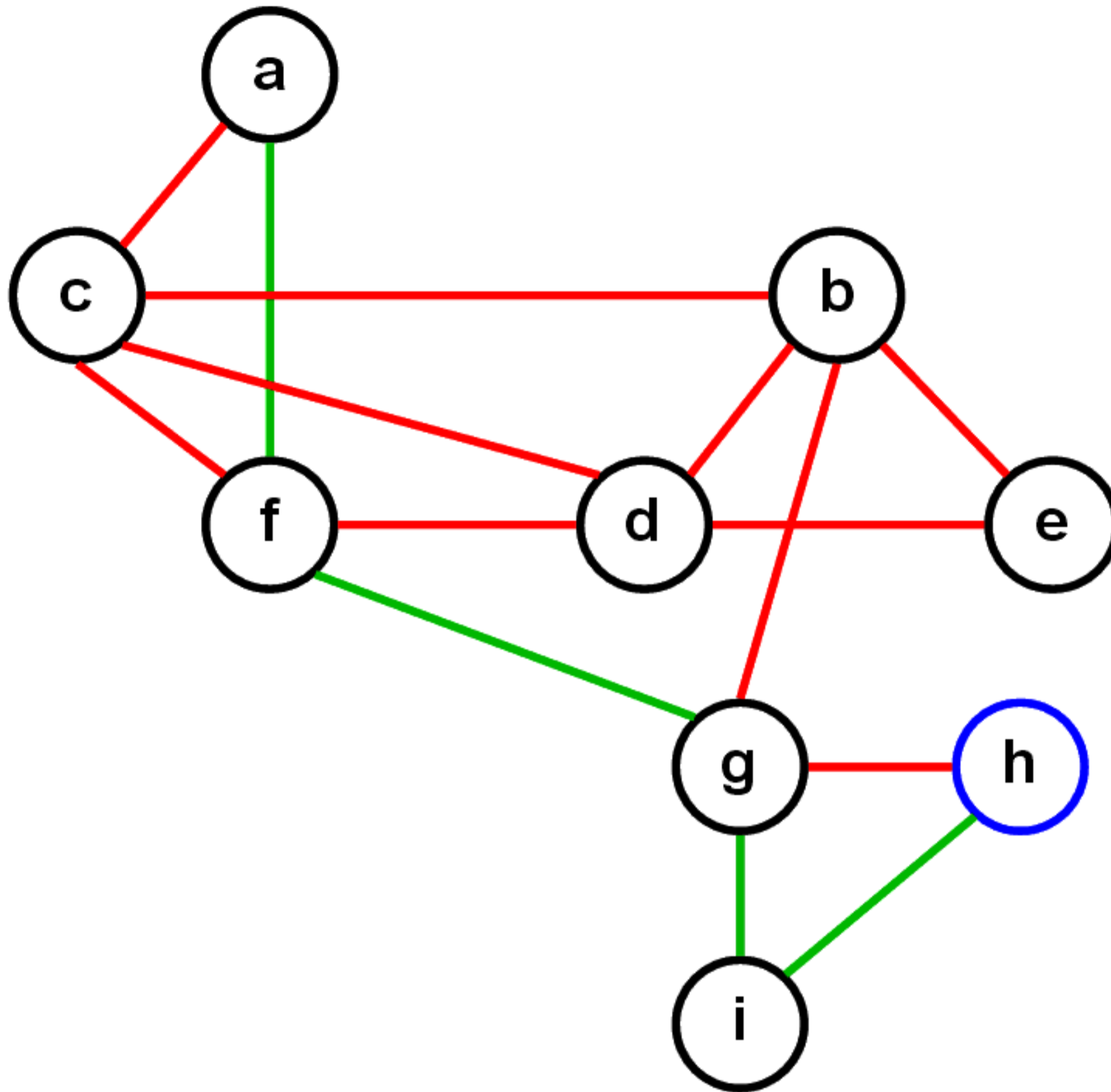
ET: a, f,



LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, h, i,

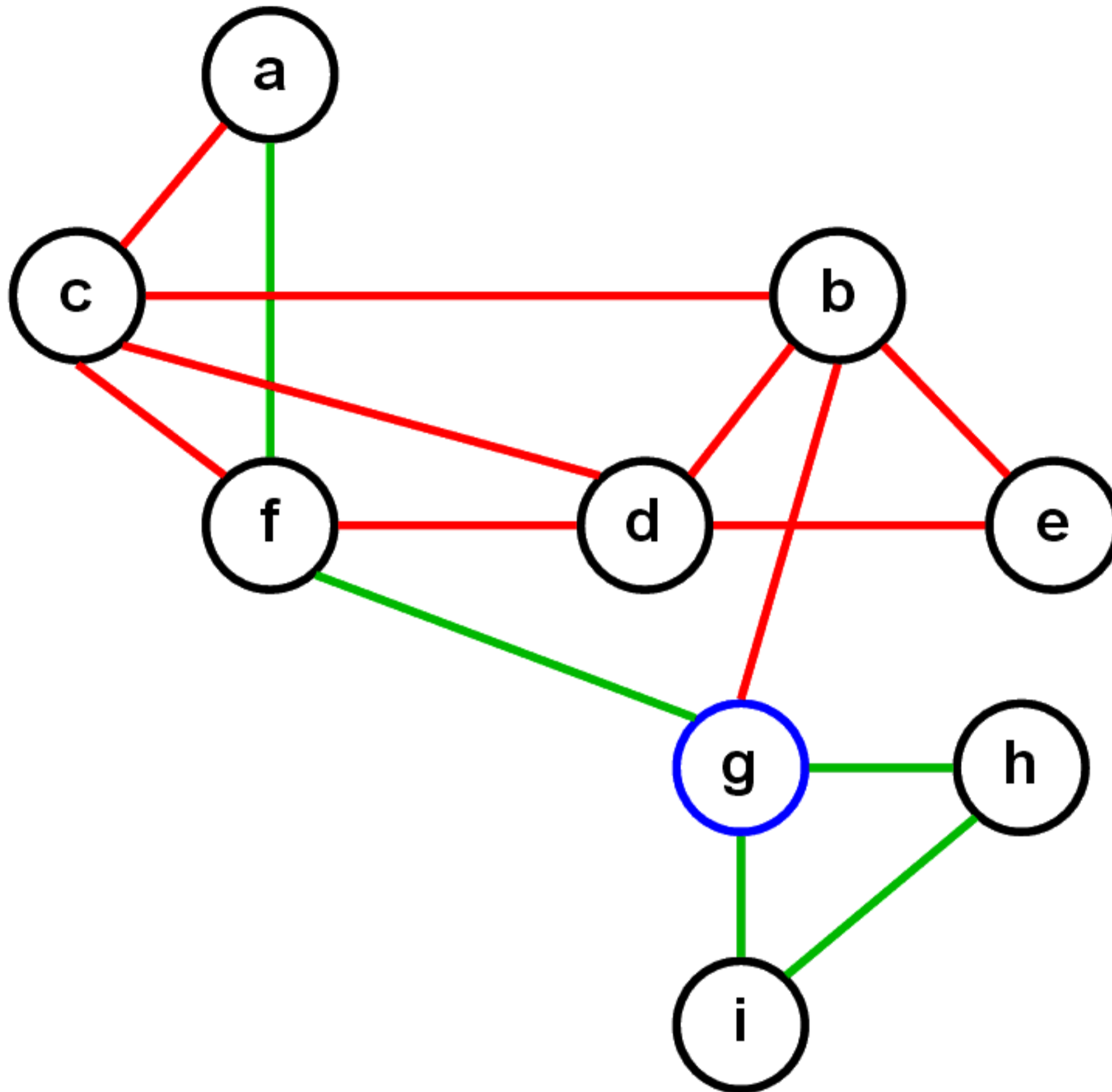
ET: a, f, g,





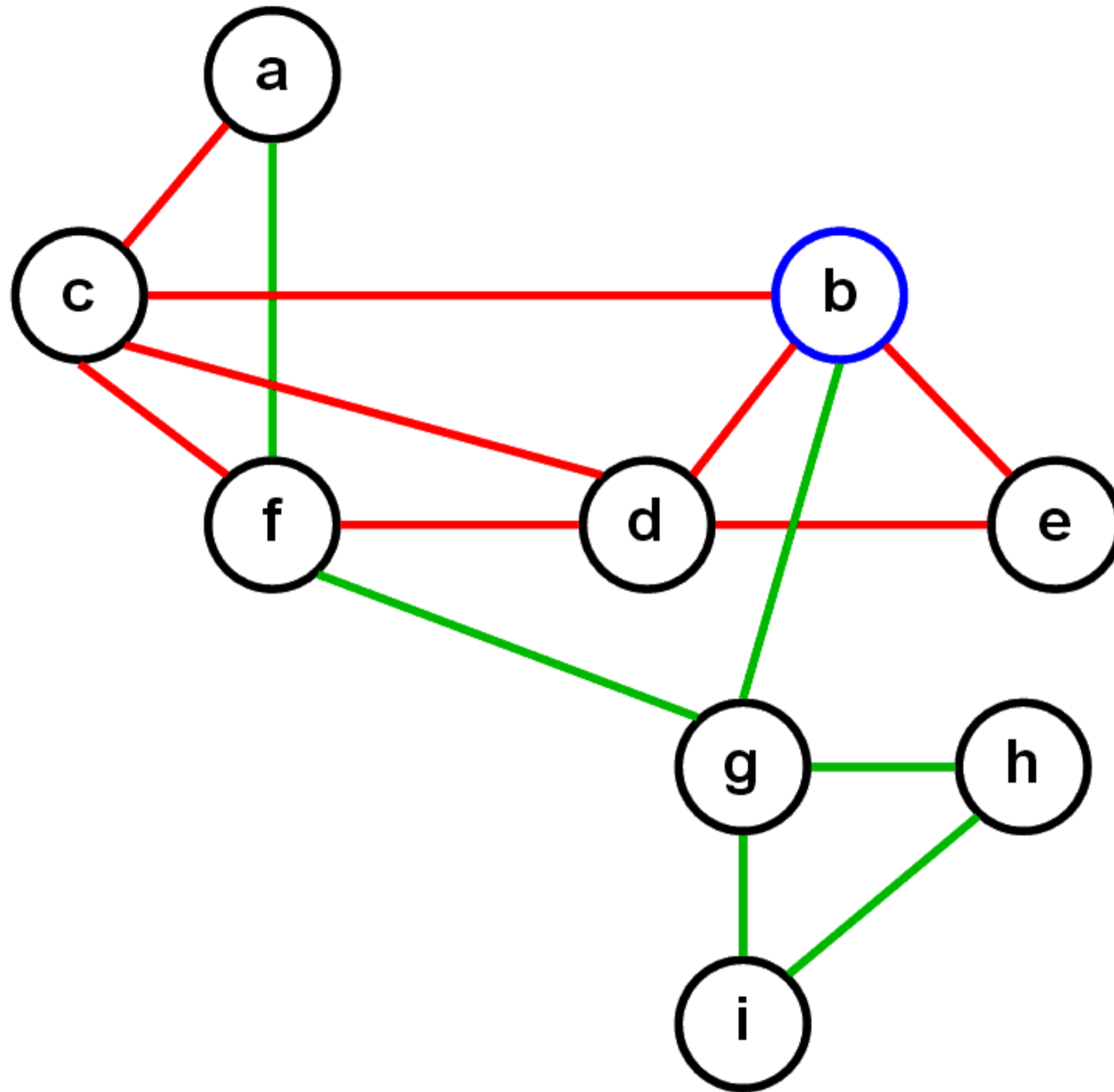
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g, h,

ET: a, f, g, i,



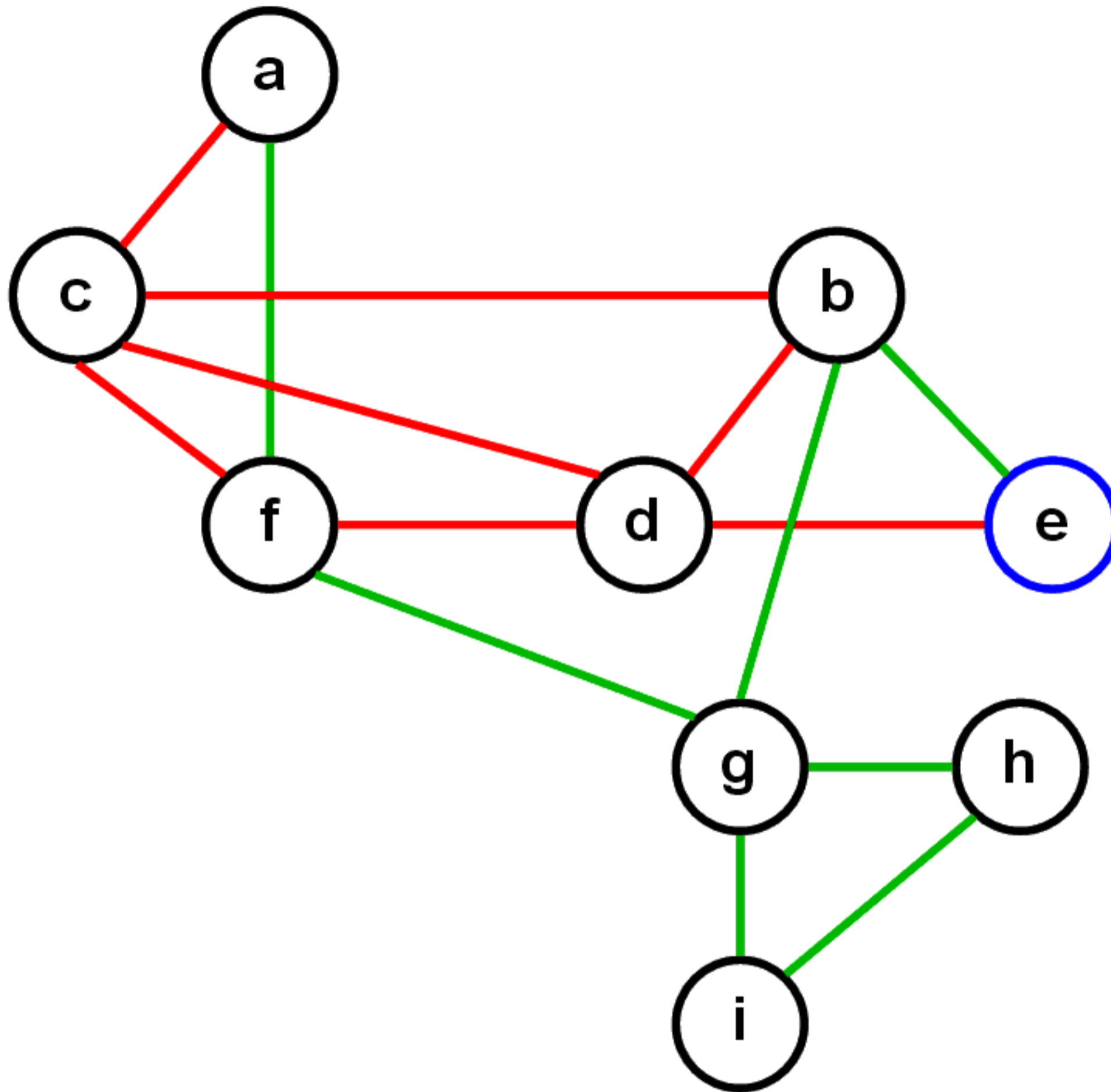
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b, g,

ET: a, f, g, i, h,



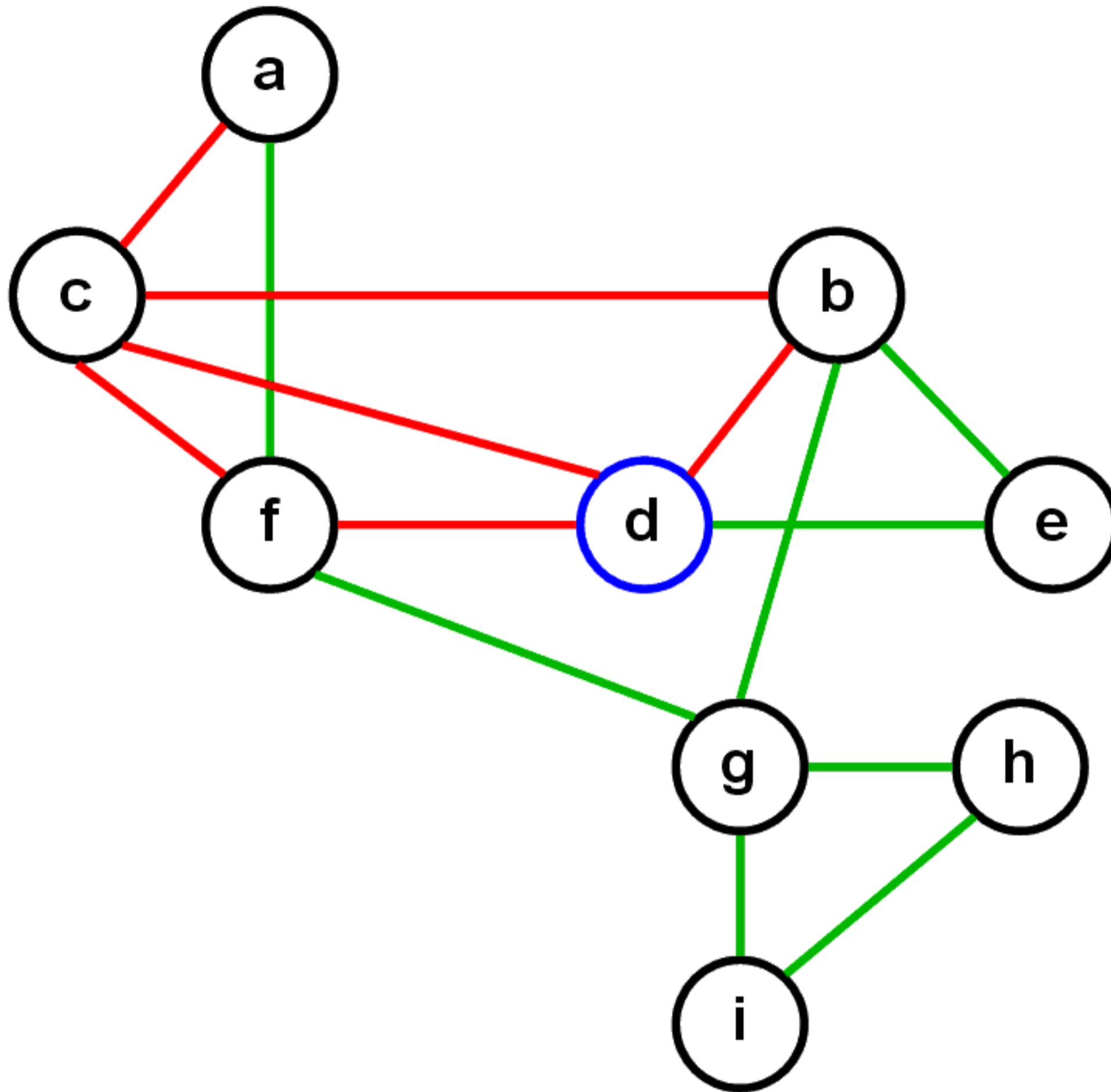
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e, b,

ET: a, f, g, i, h, g,



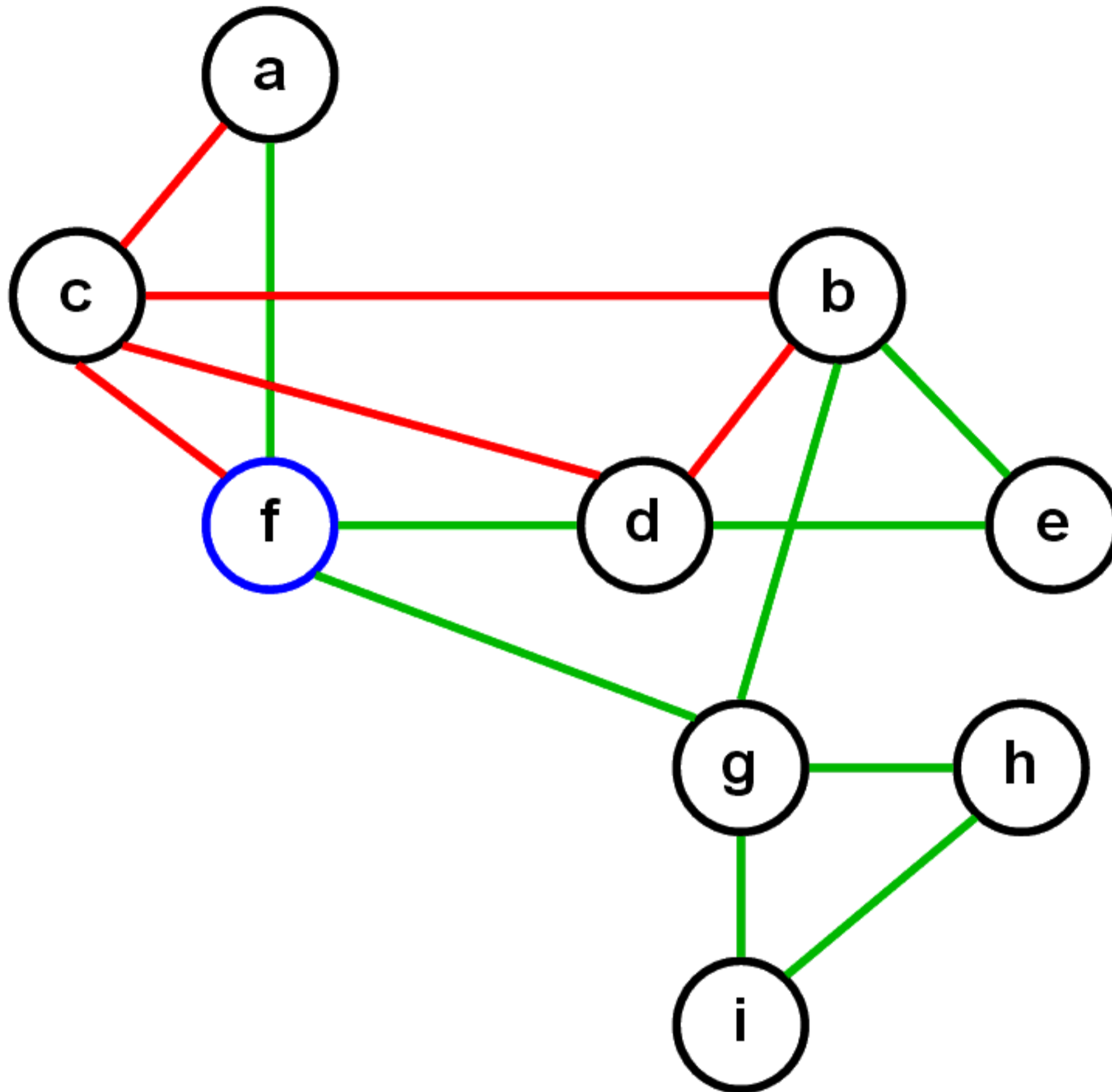
LIFO: a, c, b, d, c, f, d, e,

ET: a, f, g, i, h, g, b,



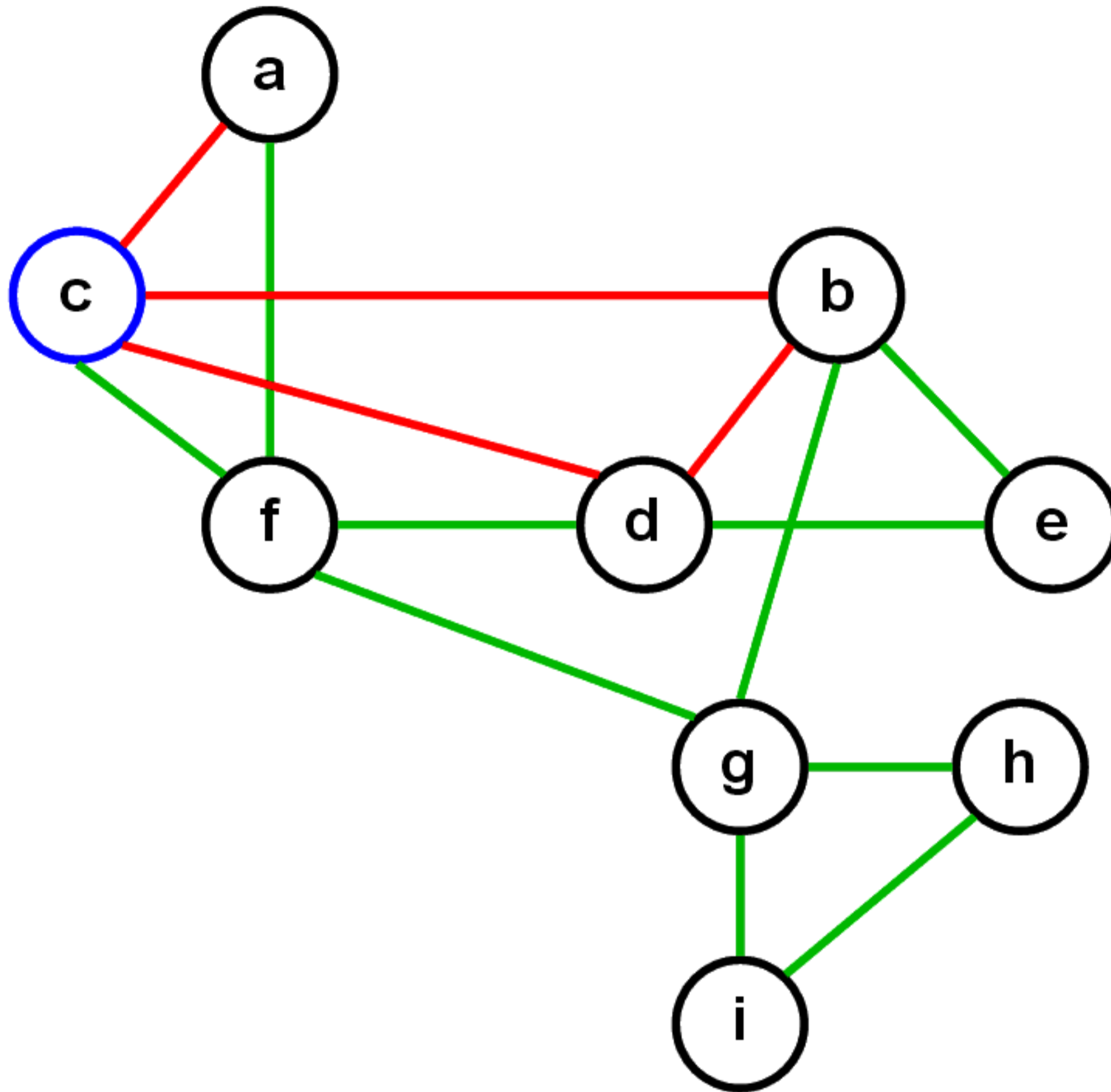
LIFO: a, c, b, d, c, f, d,

ET: a, f, g, i, h, g, b, e,



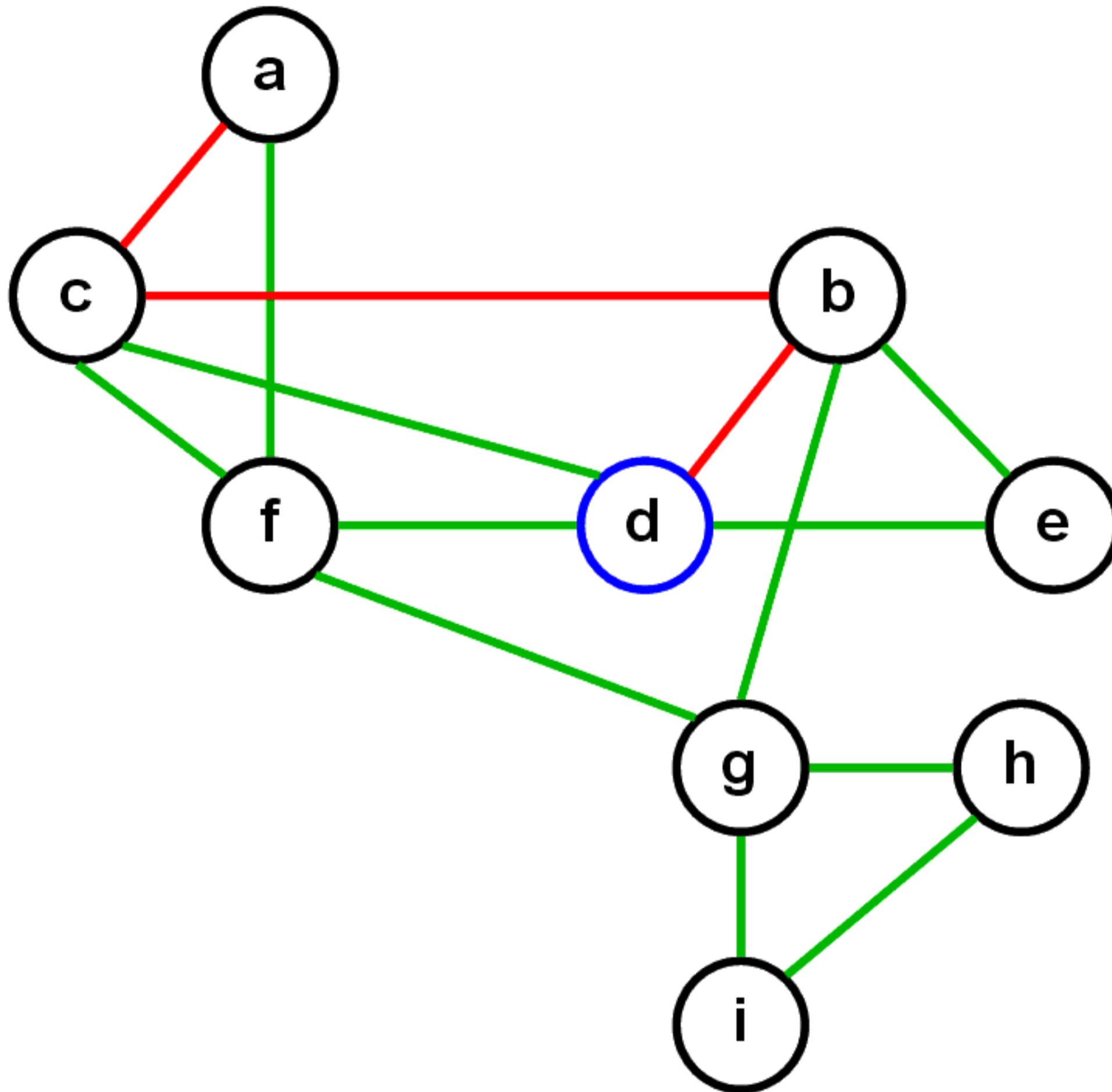
LIFO: a, c, b, d, c, f,

ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d,



LIFO: a, c, b, d, c,

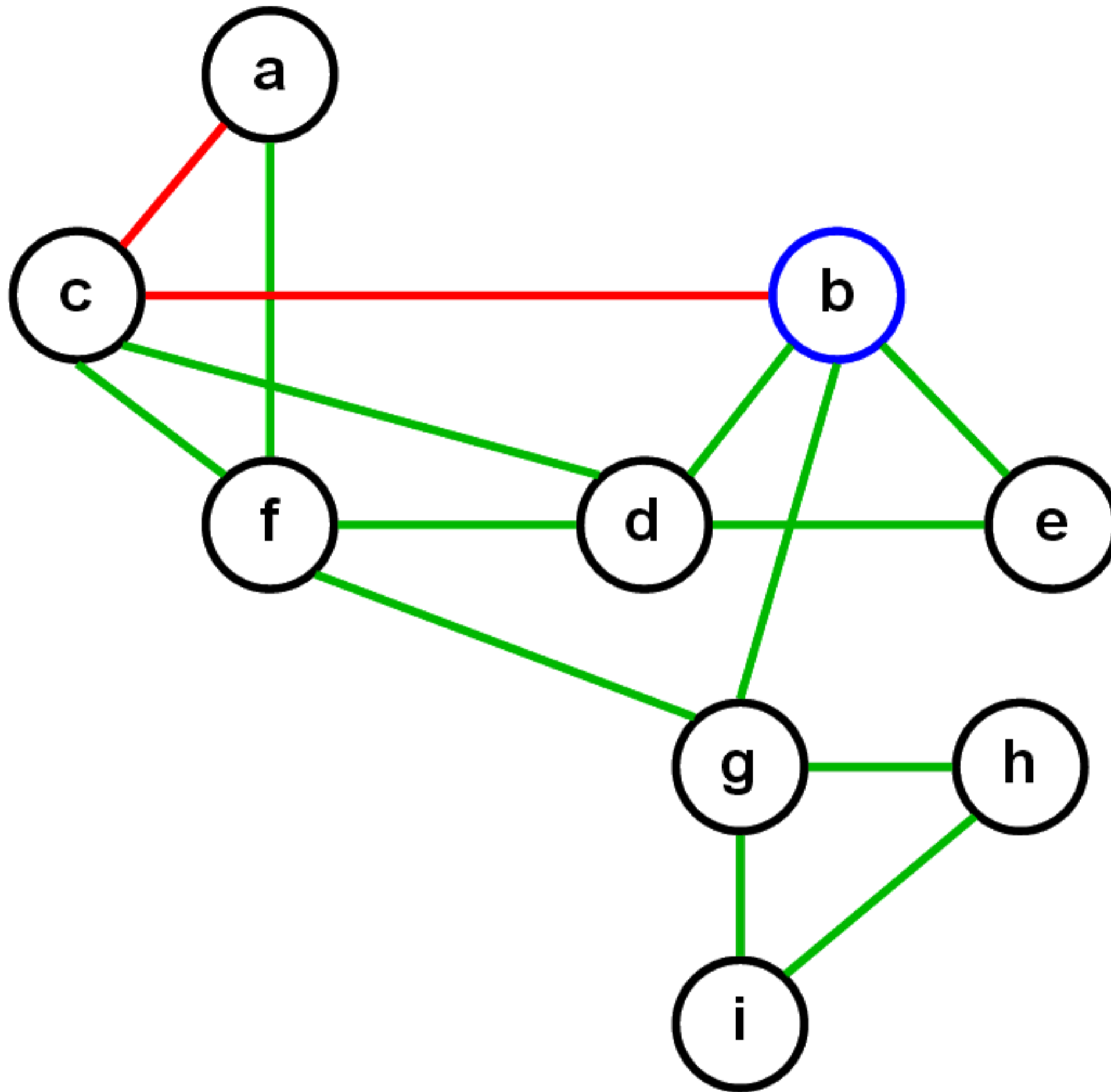
ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f,



LIFO: a, c, b, d,

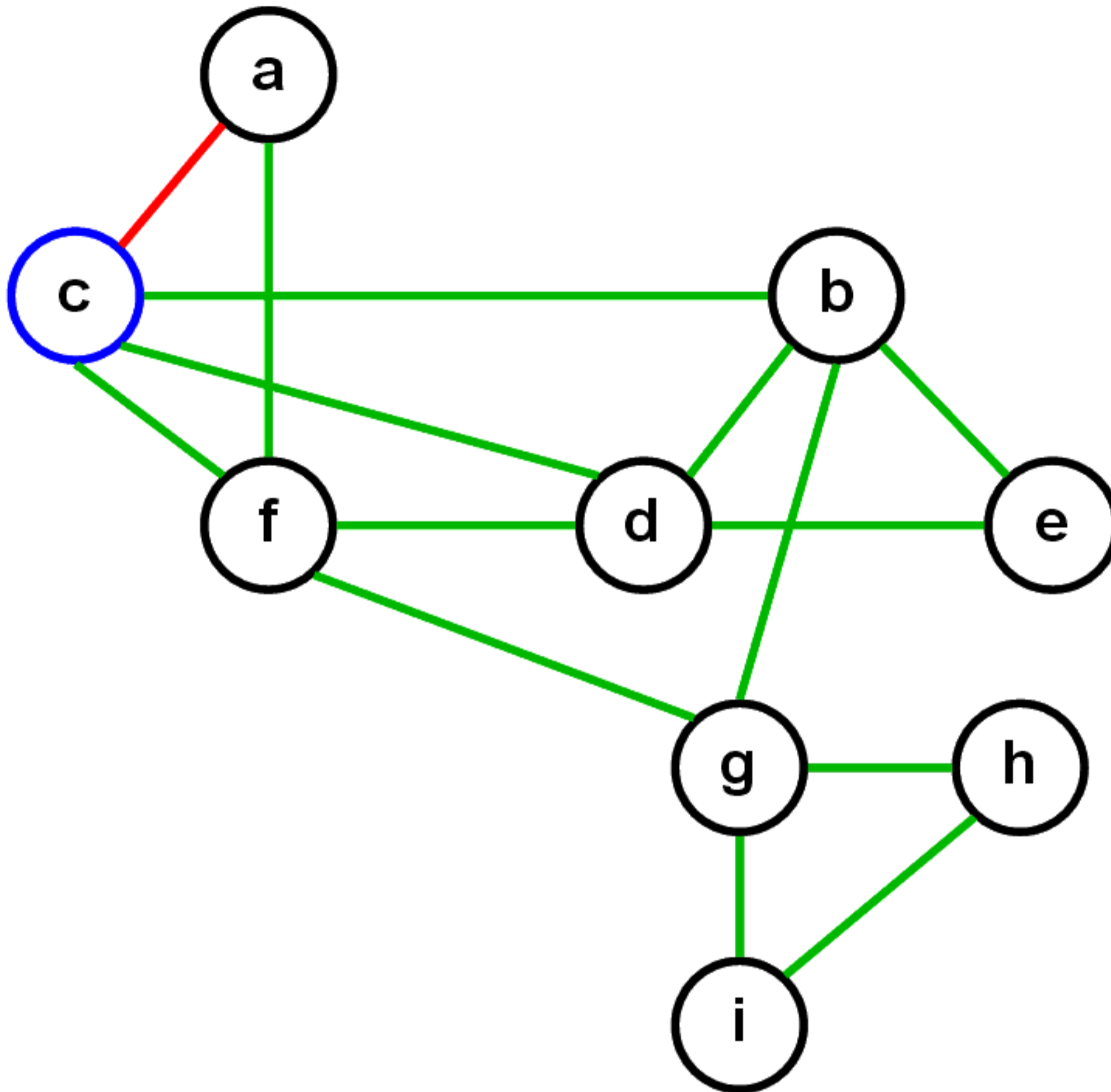
ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c,





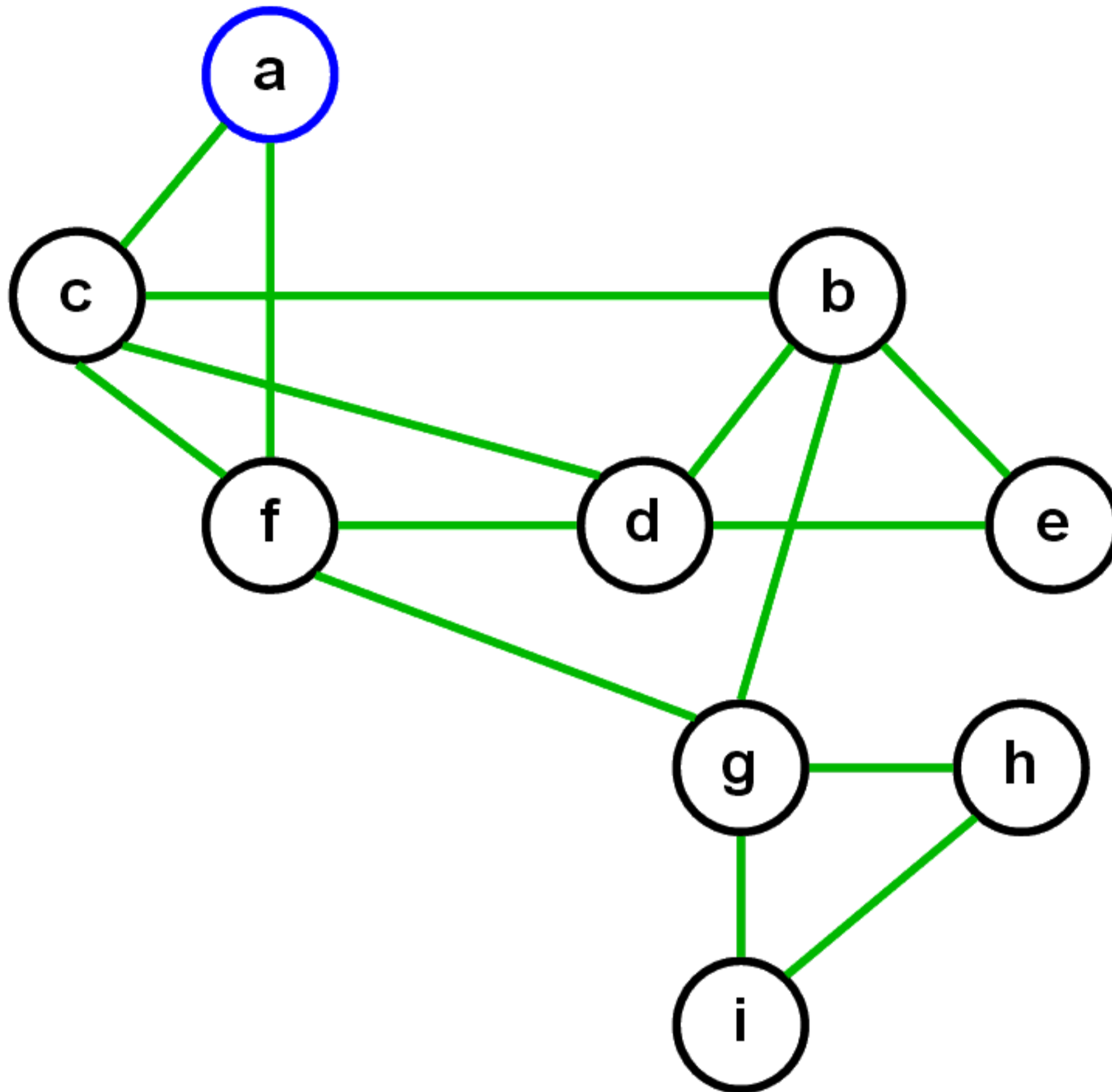
LIFO: a, c, b,

ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c, d,



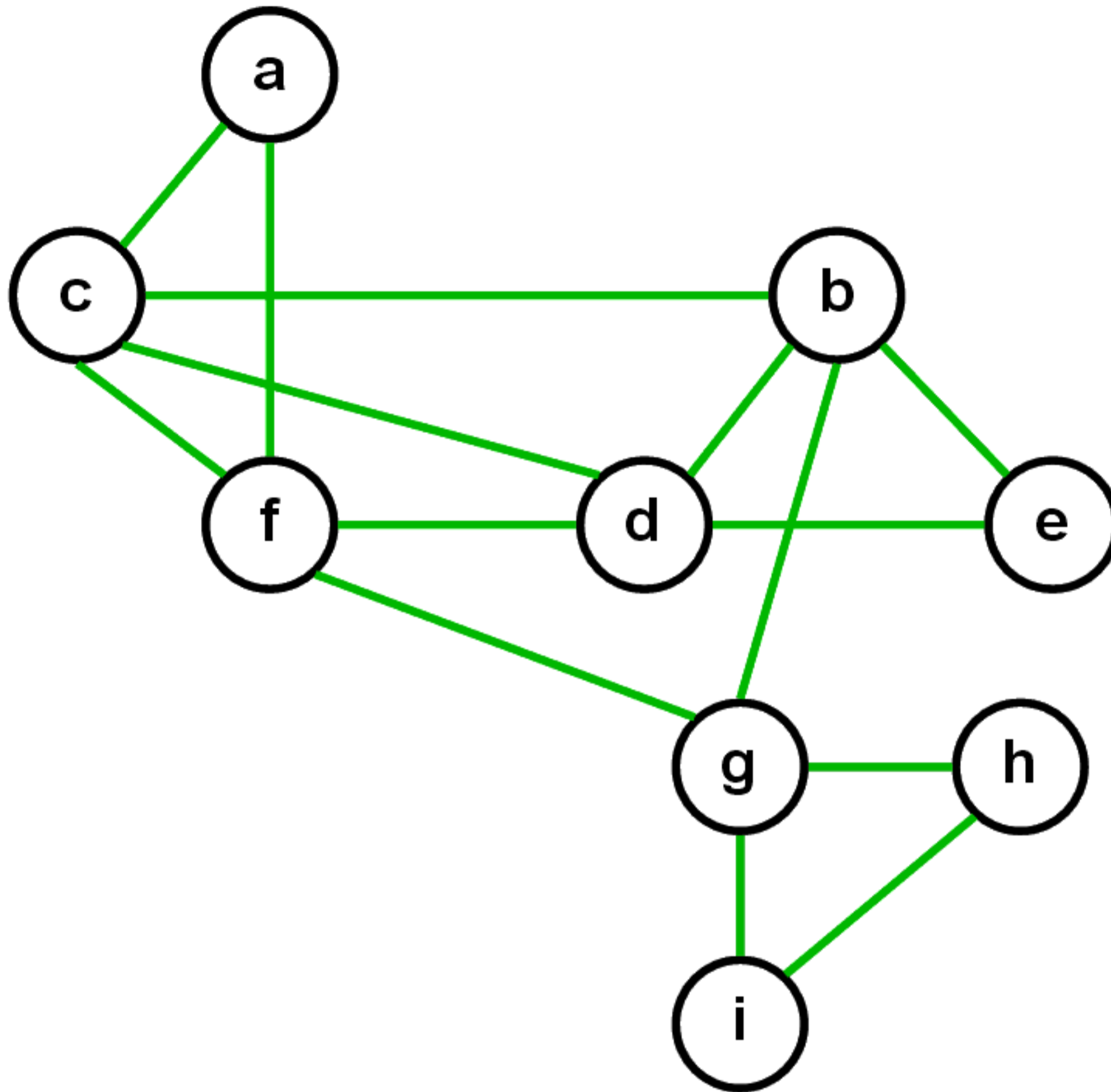
LIFO: a, c,

ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c, d, b,



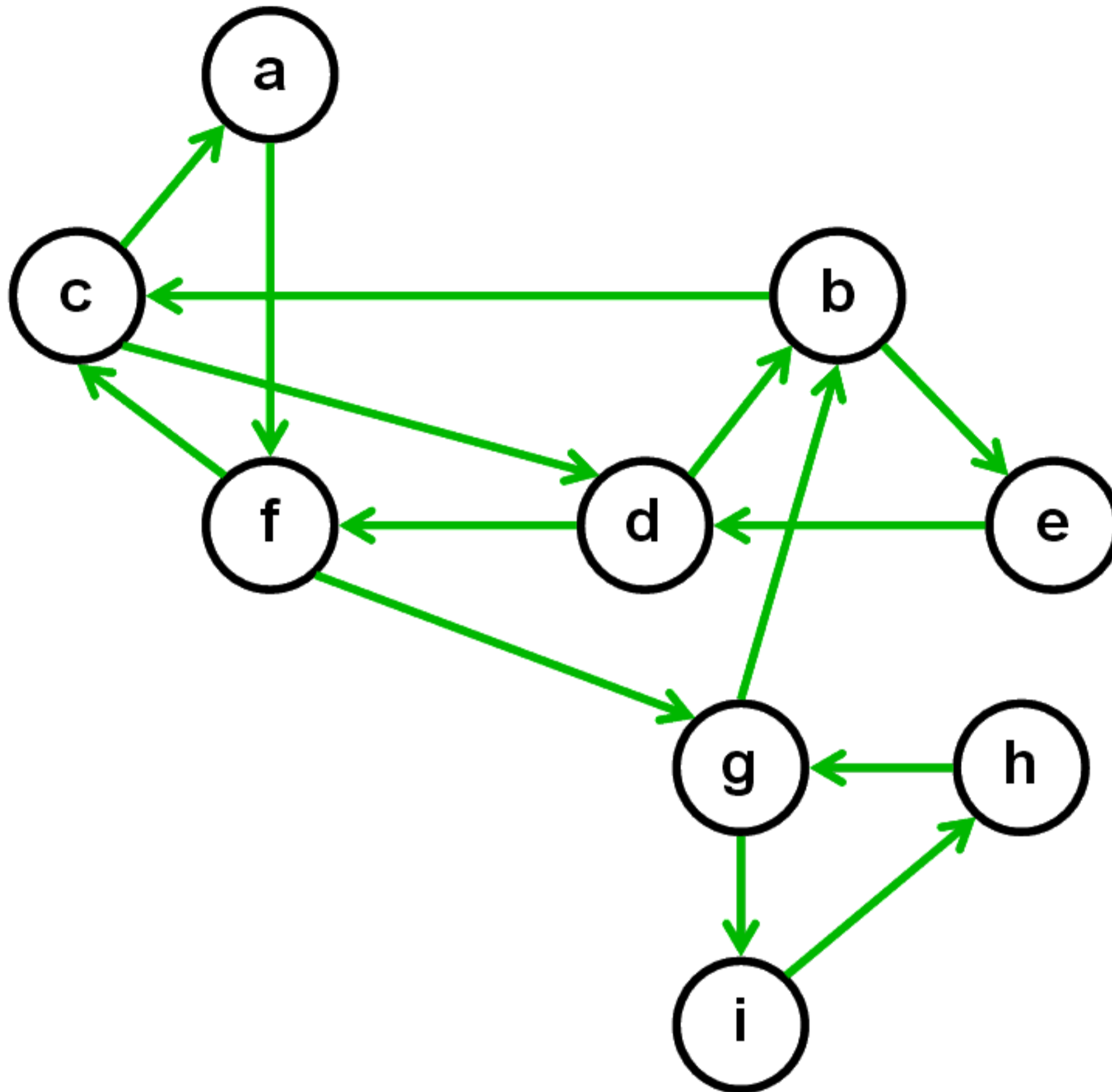
LIFO: a,

ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c, d, b, c,



LIFO:

ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c, d, b, c, a

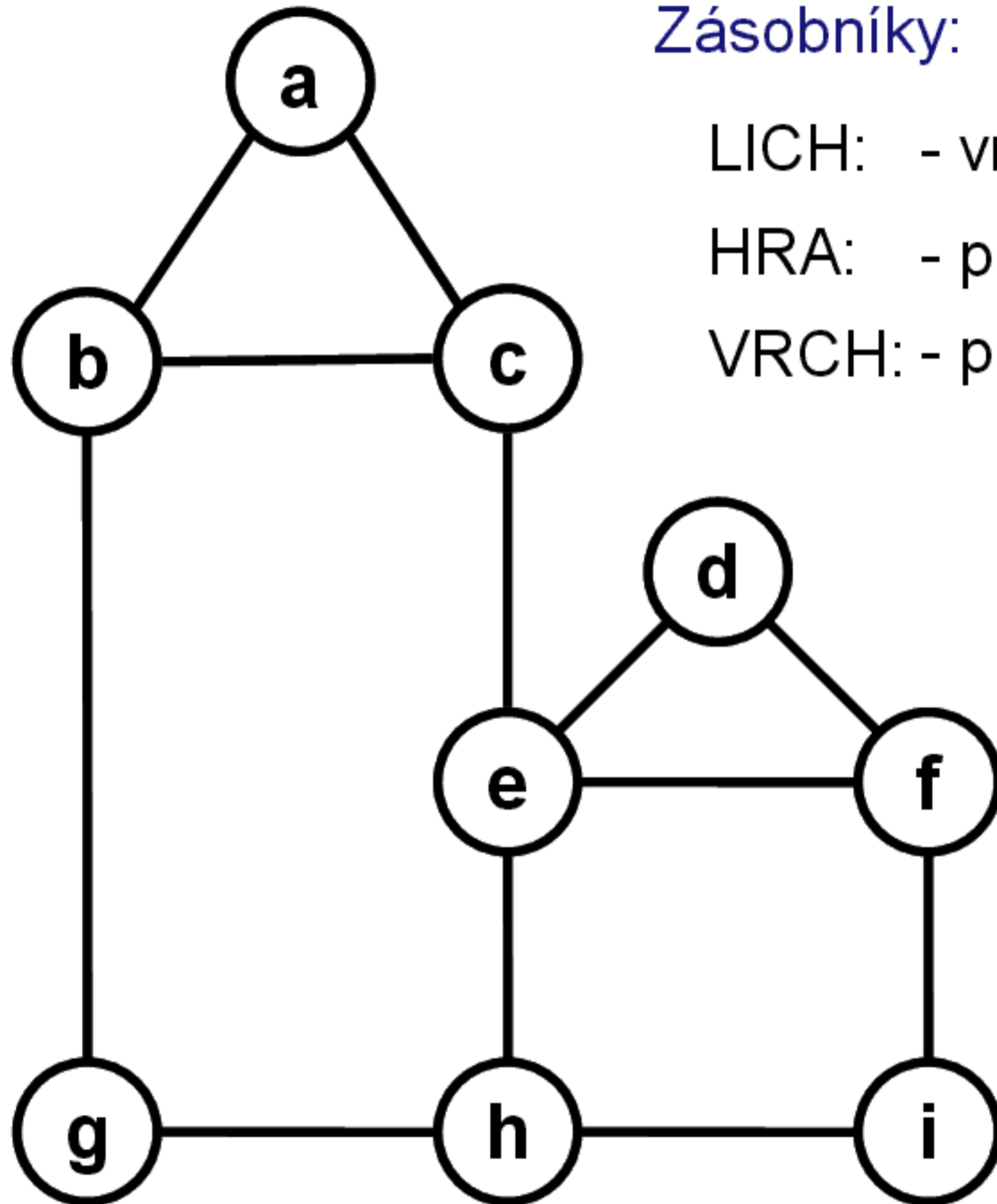


ET: a, f, g, i, h, g, b, e, d, f, c, d, b, c, a

# Počet tahů v neEulerovských grafech

Pokud graf obsahuje více než 2 vrcholy lichého stupně, nelze jej nakreslit jedním tahem.

# Postup řešení



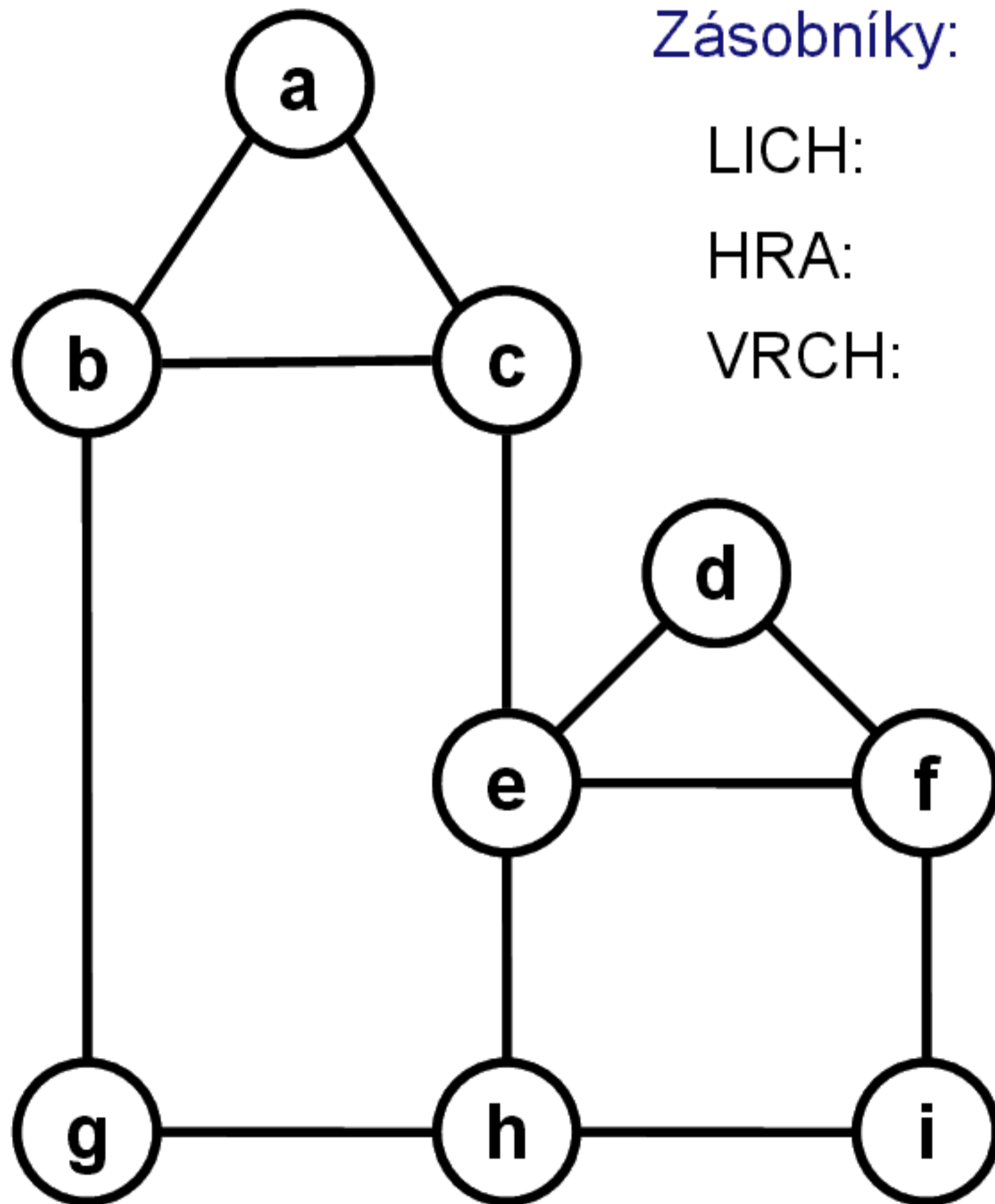
Zásobníky:

LICH: - vrcholy lichého stupně

HRA: - přidání hrany

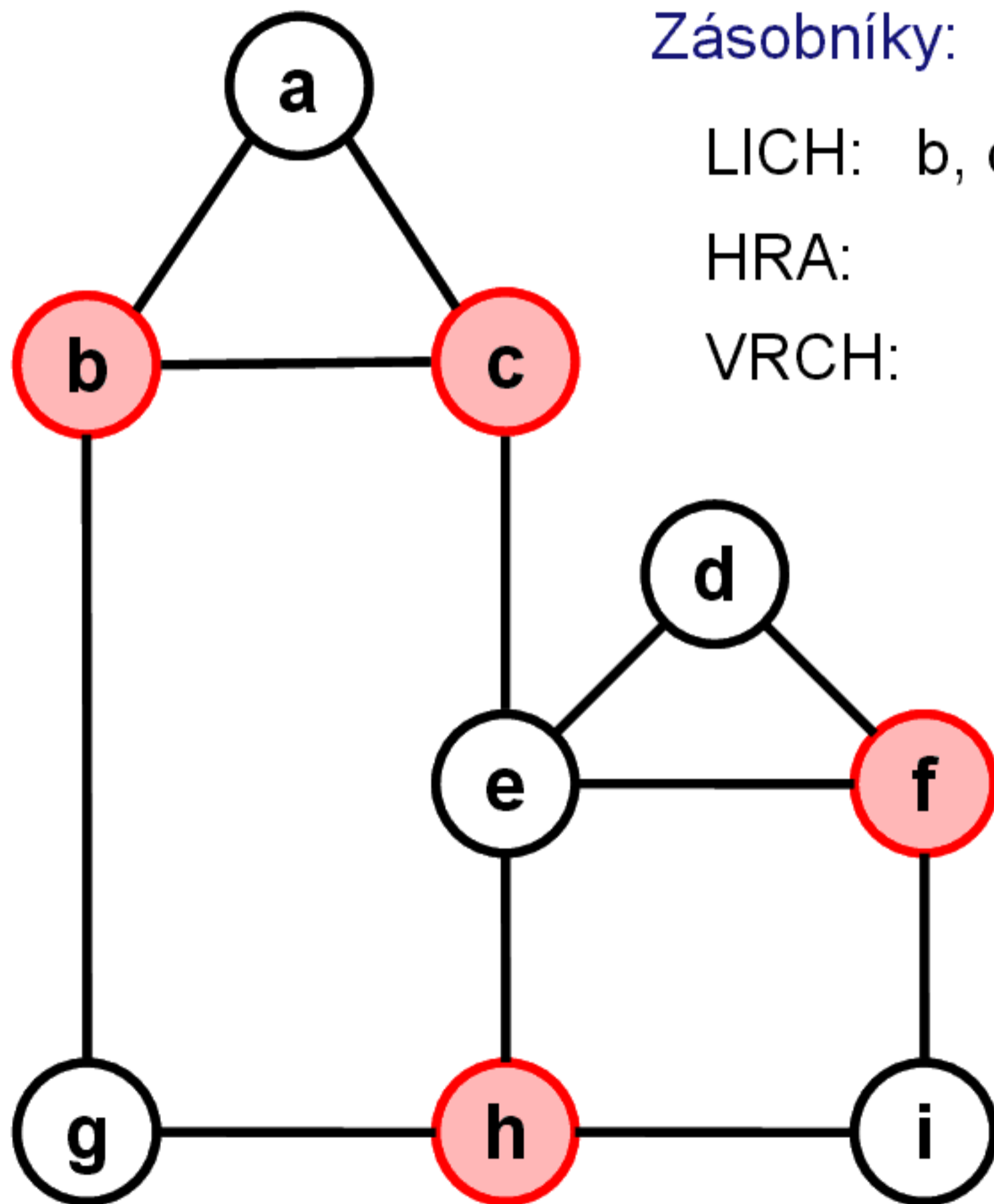
VRCH: - přidání vrcholy

1. Nalezneme všechny vrcholy lichého stupně a přidáme je do zásobníku LICH

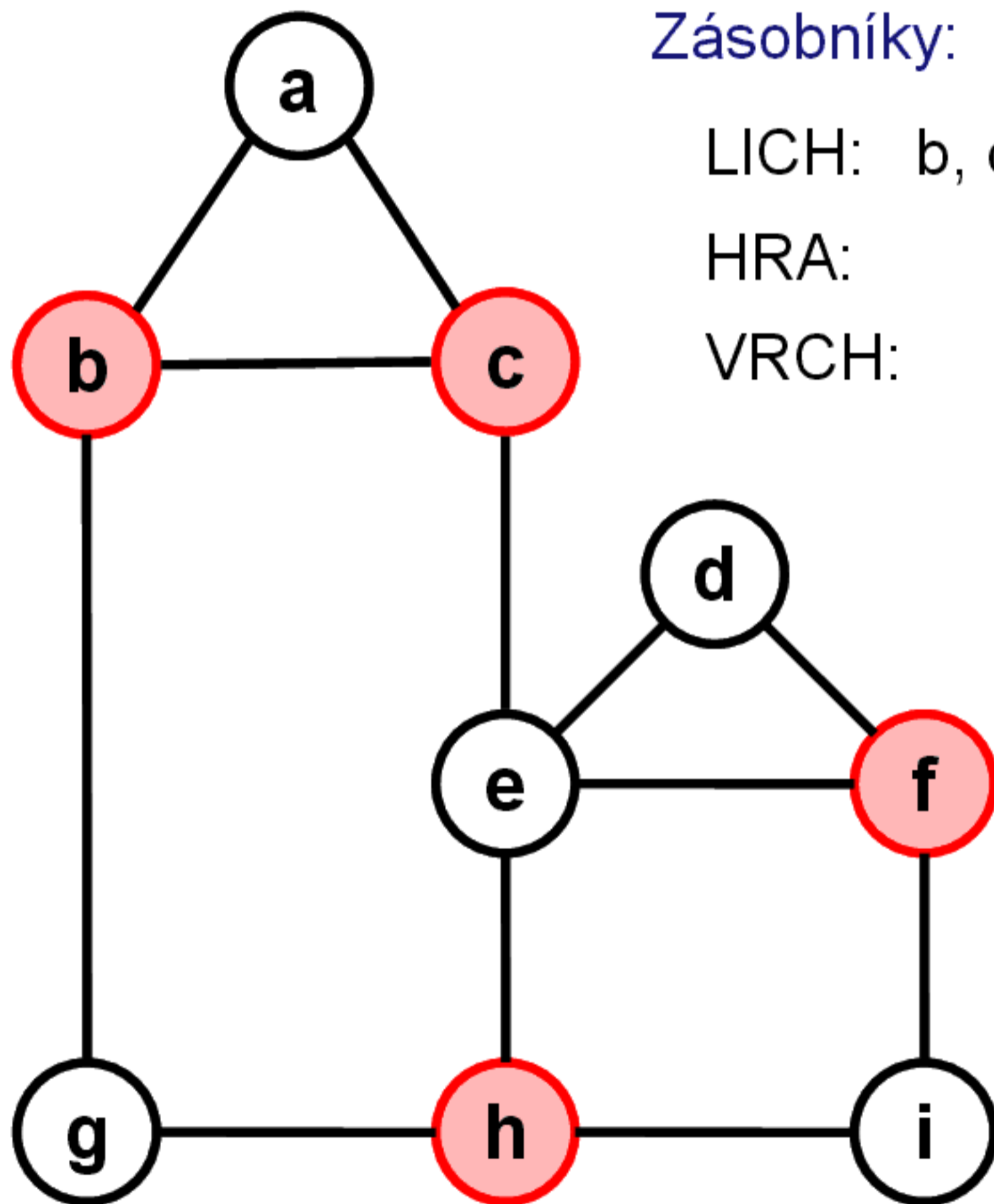




1. Nalezneme všechny vrcholy lichého stupně a přidáme je do zásobníku LICH



## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



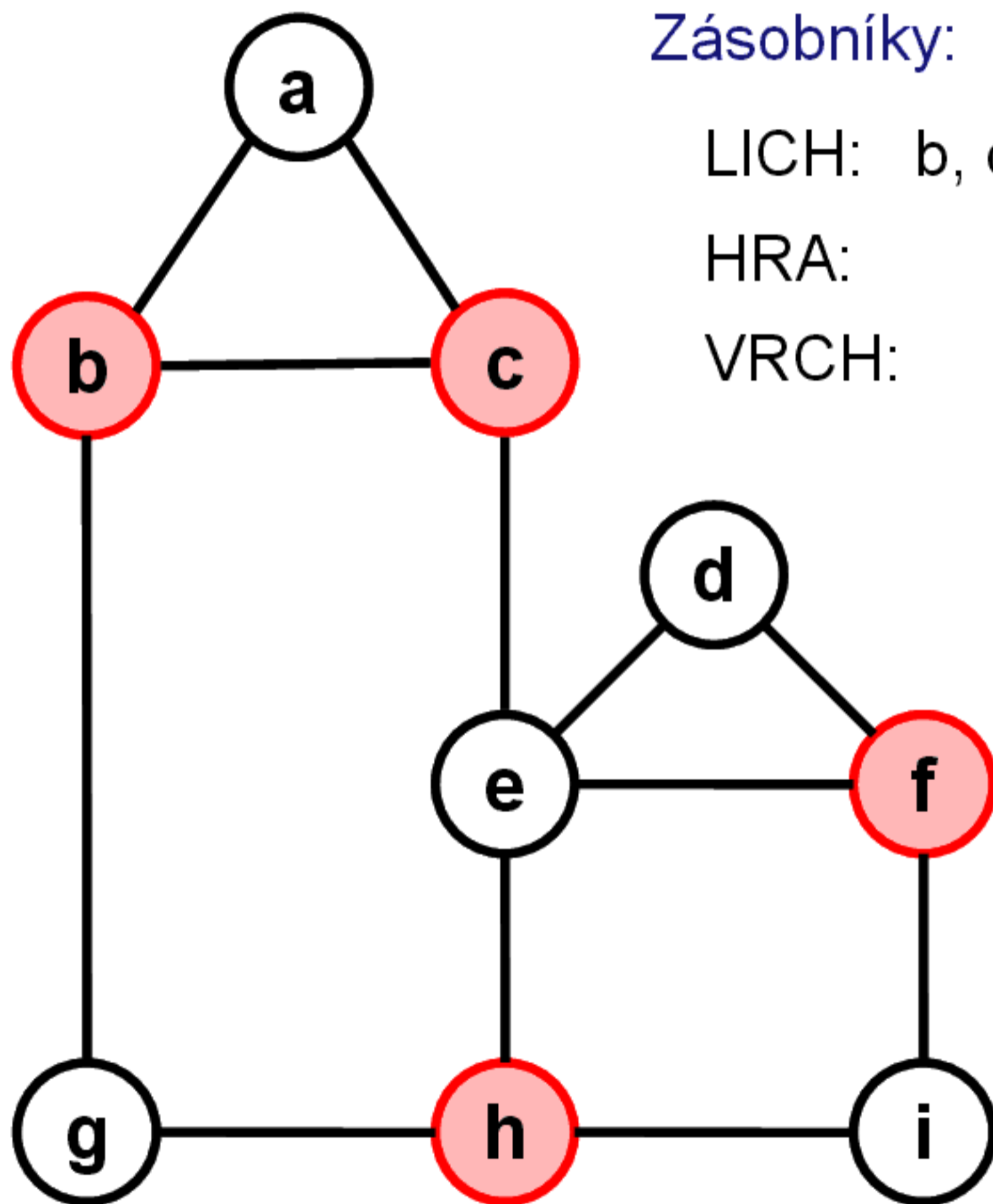
Zásobníky:

LICH: b, c, f, h

HRA:

VRCH:

## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



Zásobníky:

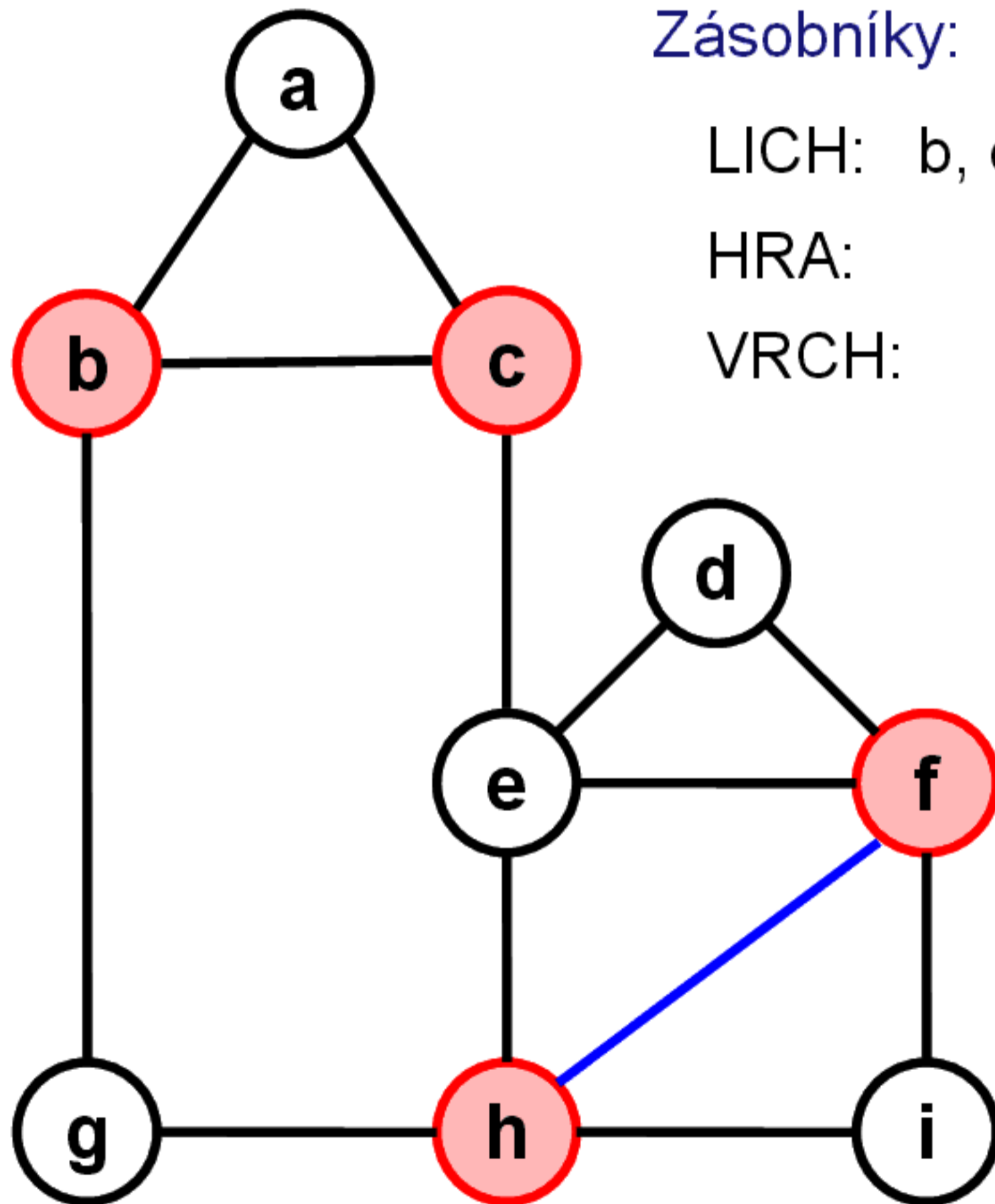
LICH: b, c, f, h

HRA:

VRCH:

- a) nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA

## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



Zásobníky:

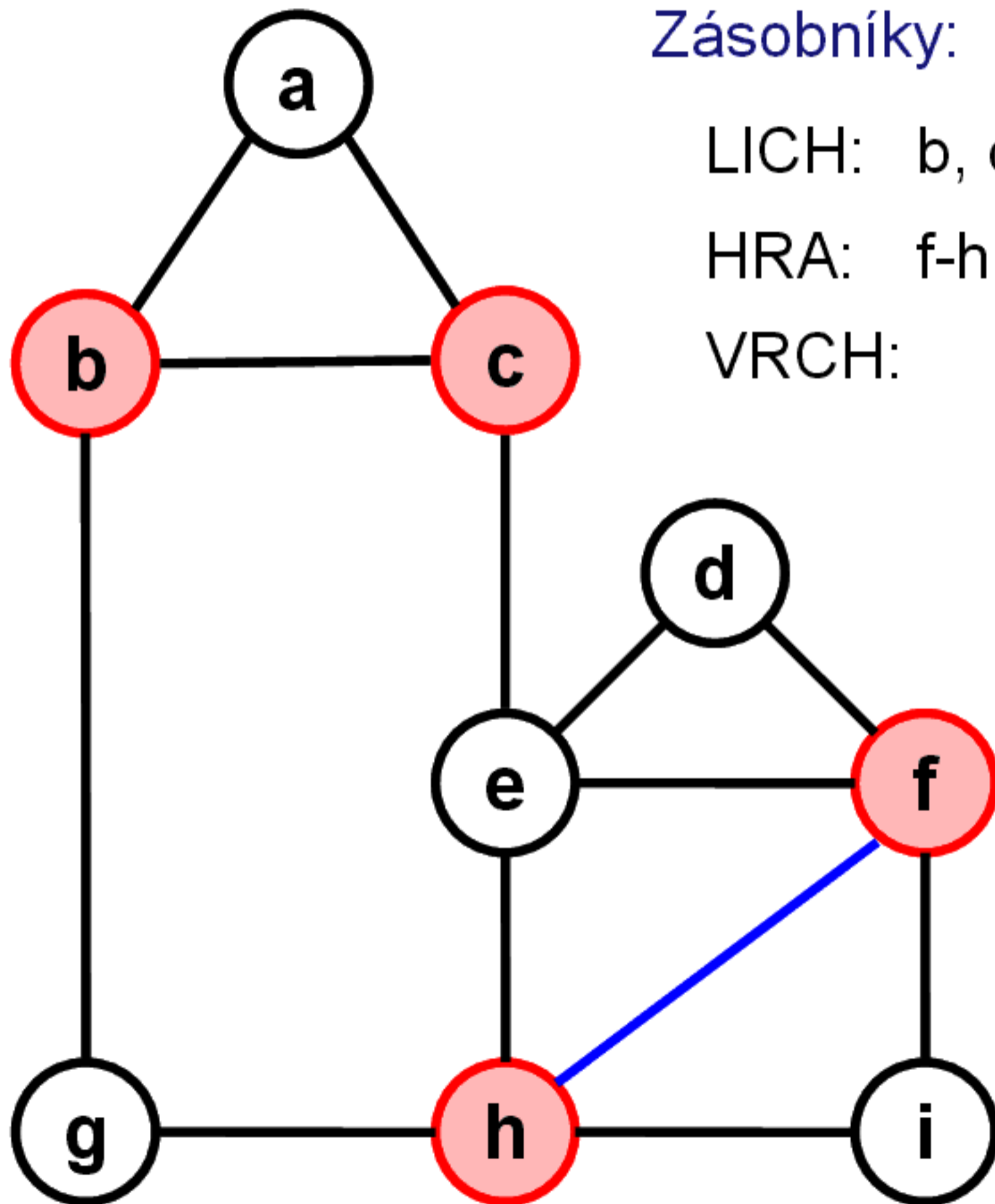
LICH: b, c, f, h

HRA:

VRCH:

- a) nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA

## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



Zásobníky:

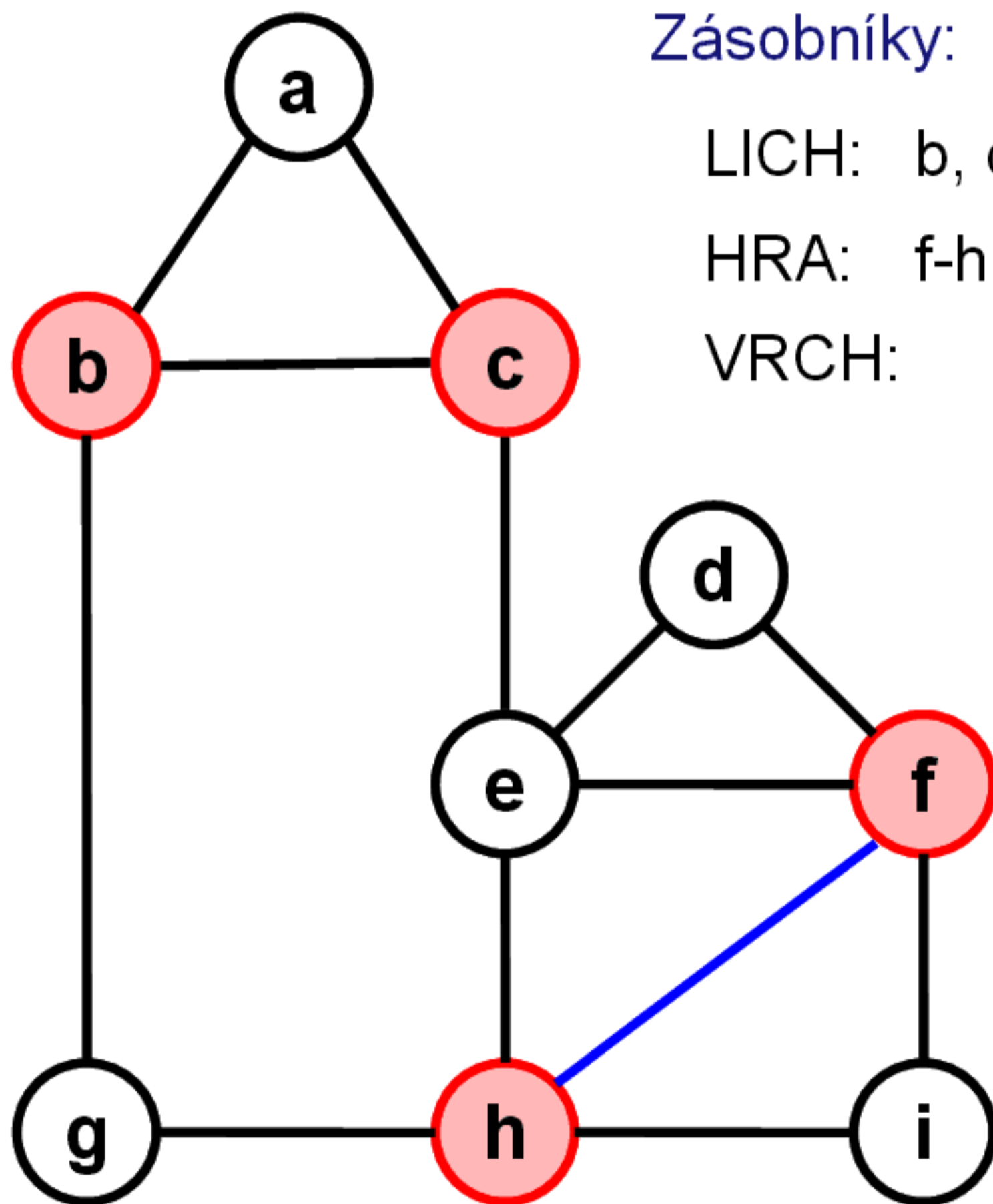
LICH: b, c,

HRA: f-h

VRCH:

- a) nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA

## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



Zásobníky:

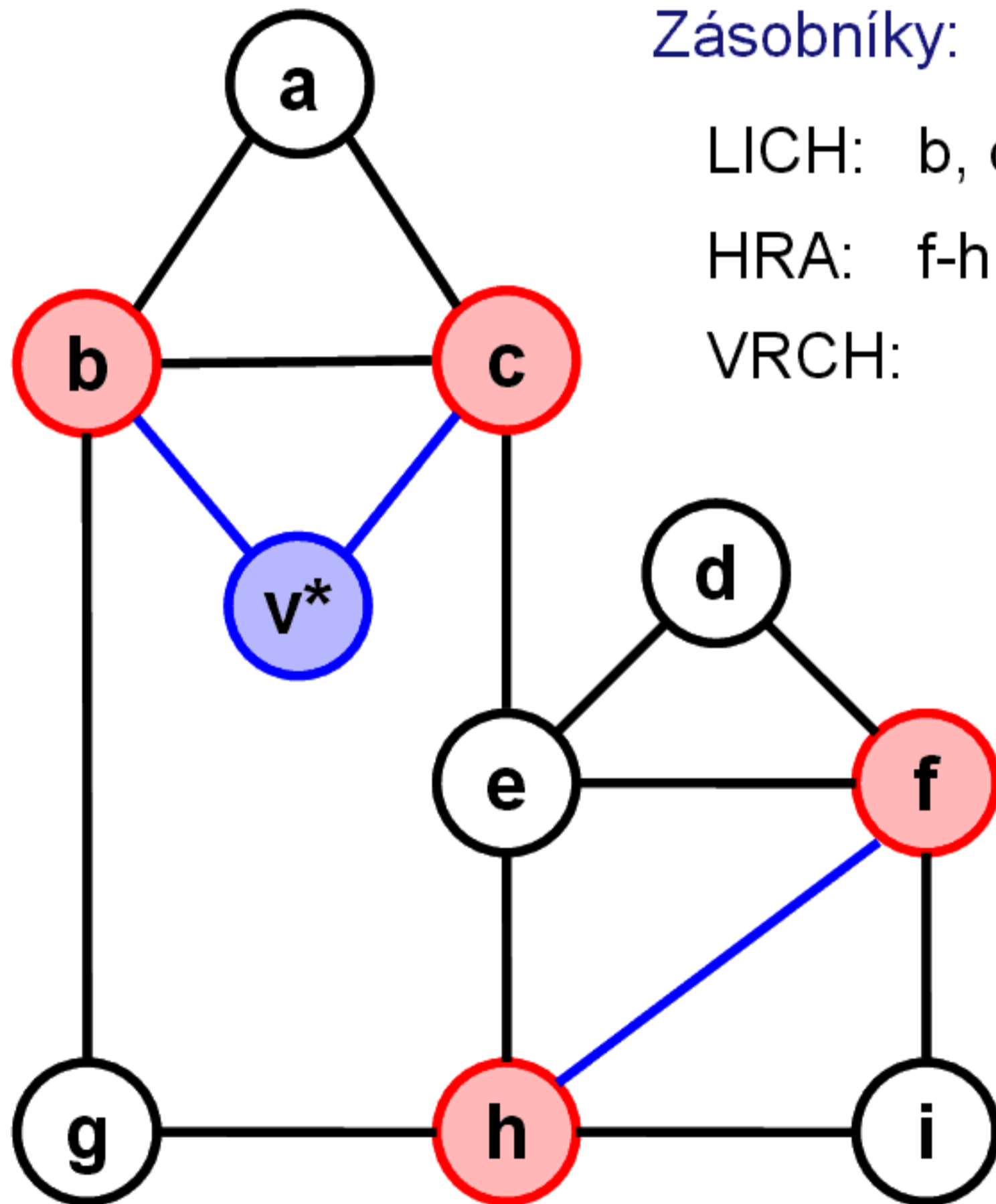
LICH: b, c,

HRA: f-h

VRCH:

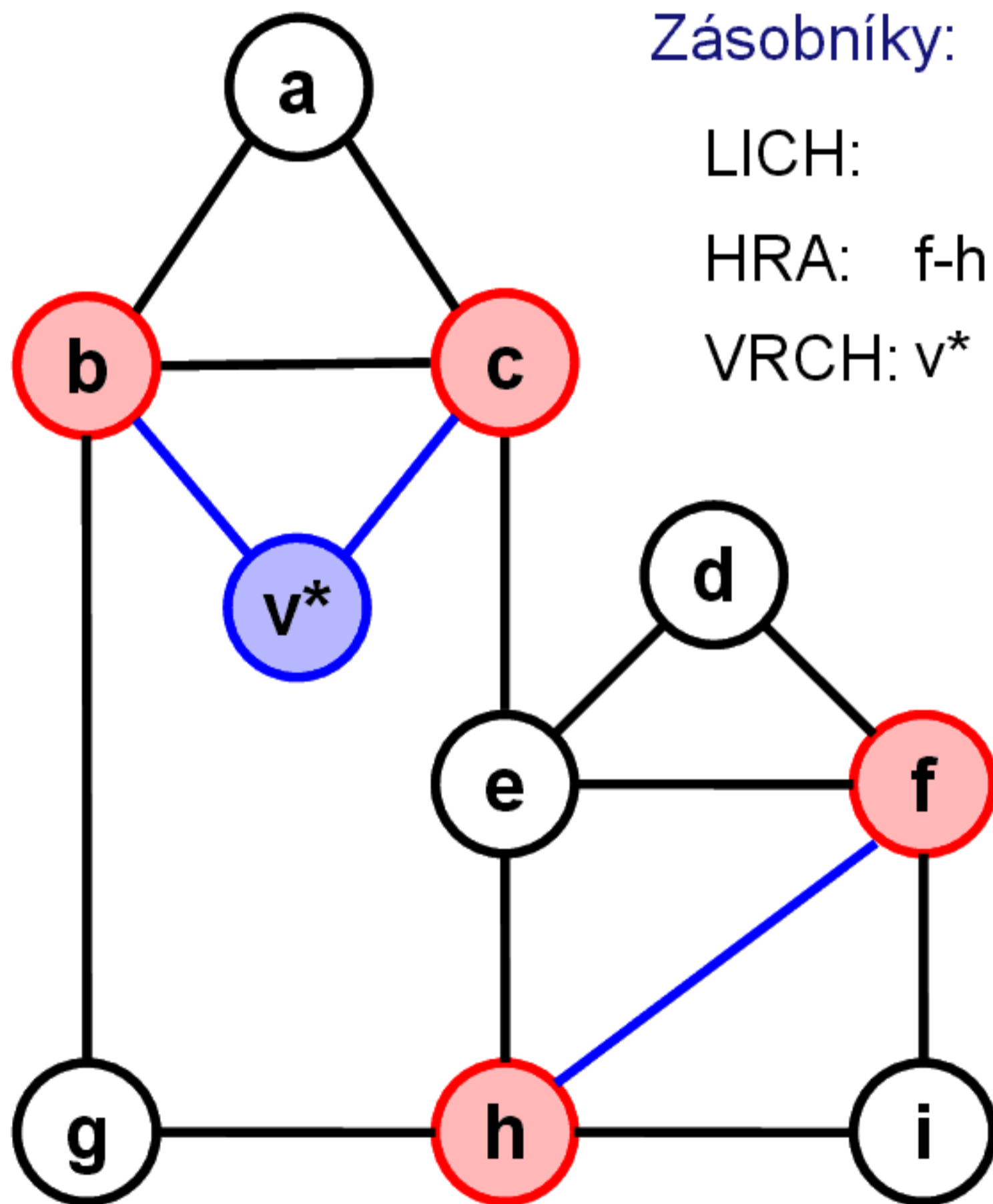
- nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA
- jsou v grafu přímo spojeny hranou, oba napojíme na fiktivní nově vytvořený vrchol, který přidáme do zásobníku VRCH

## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



- nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA
- jsou v grafu přímo spojeny hranou, oba napojíme na fiktivní nově vytvořený vrchol, který přidáme do zásobníku VRCH

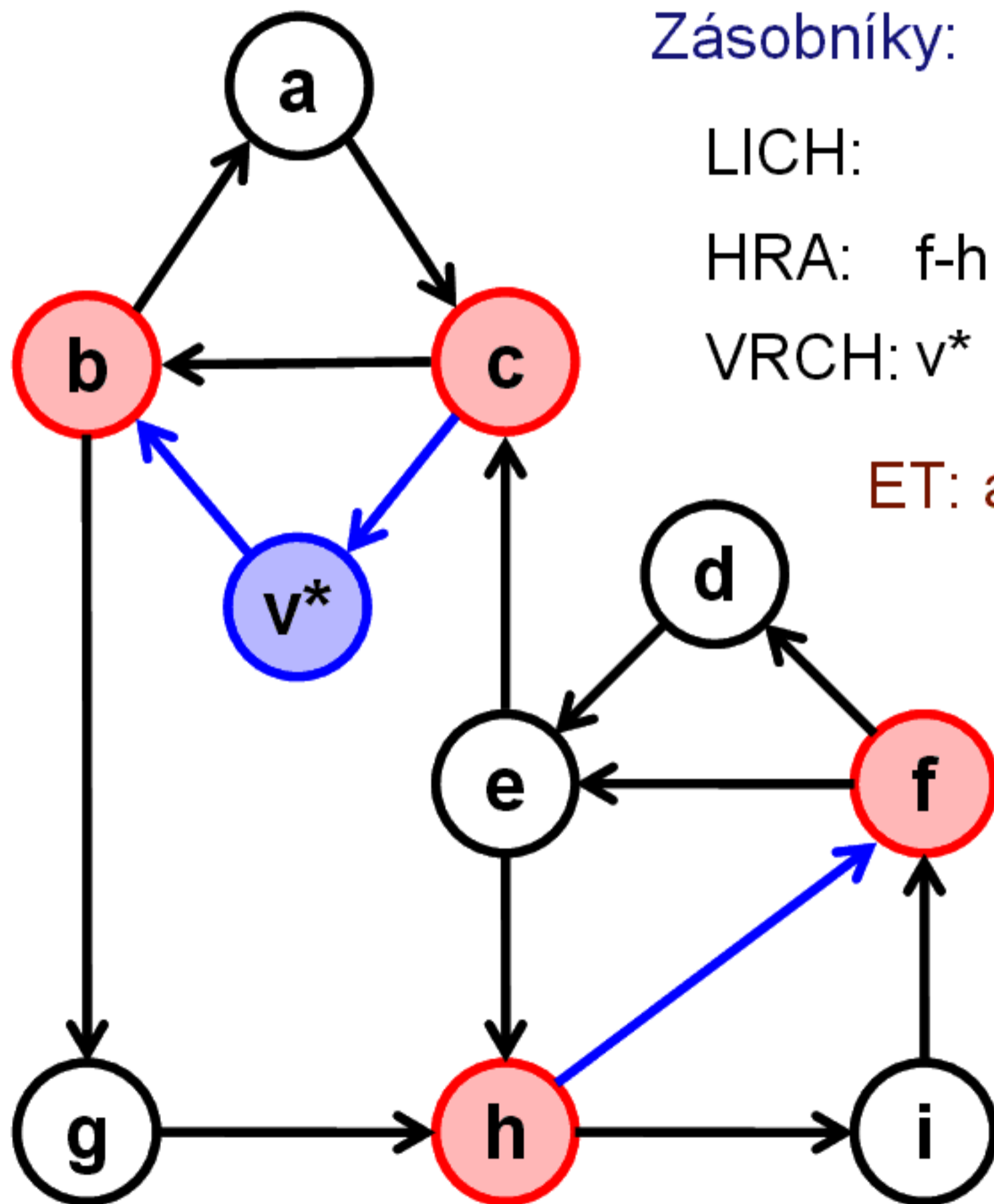
## 2. Z LICH odebíráme dvojice vrcholů a ty...



- nejsou v grafu přímo spojeny hranou, spojíme je fiktivní hranou, kterou přidáme do zásobníku HRA
- jsou v grafu přímo spojeny hranou, oba napojíme na fiktivní nově vytvořený vrchol, který přidáme do zásobníku VRCH



3. Za pomoci probraného algoritmu nalezneme Eulerovský tah (uzavřený)



Zásobníky:

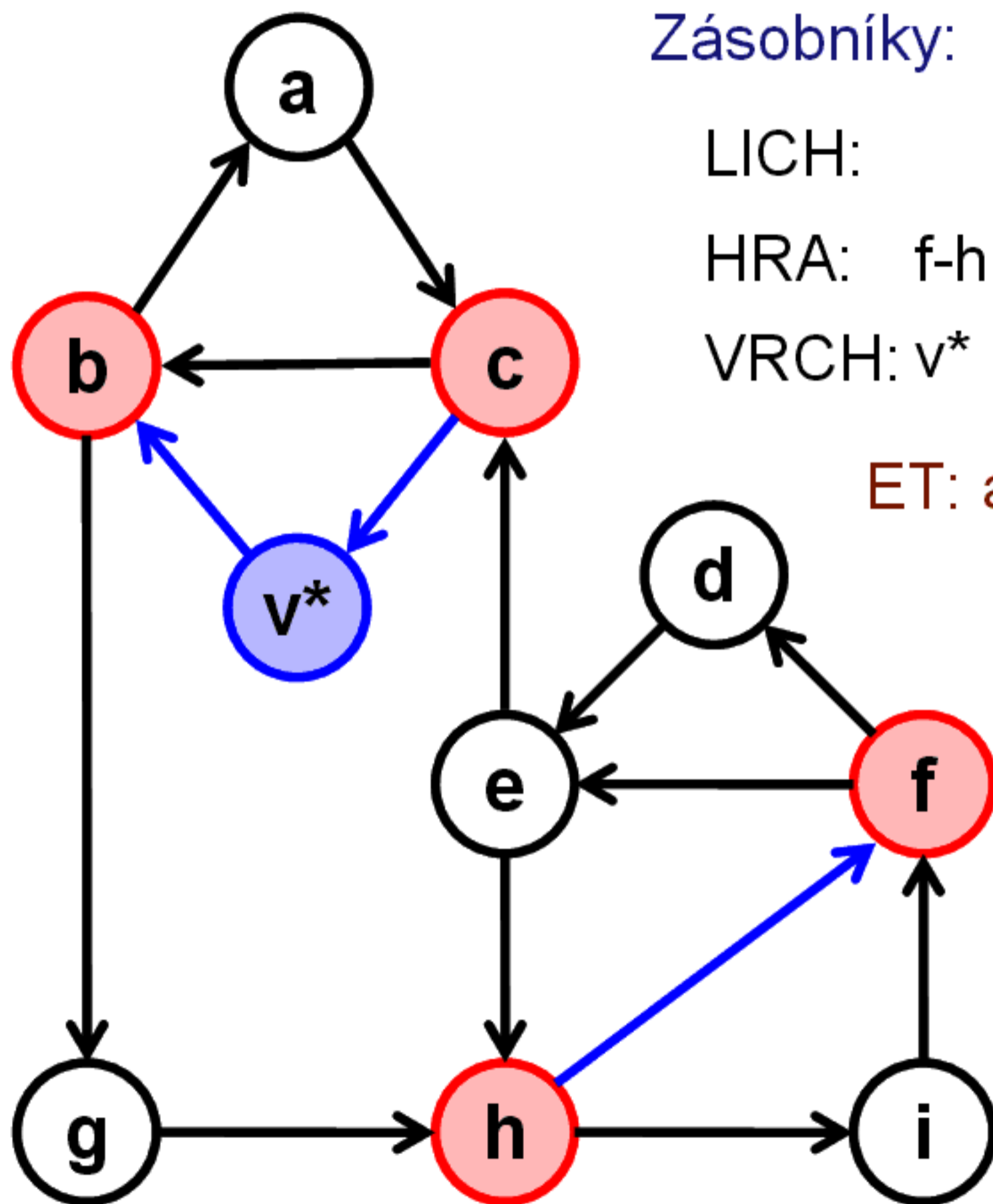
LICH:

HRA: f-h

VRCH: v\*

ET: a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



Zásobníky:

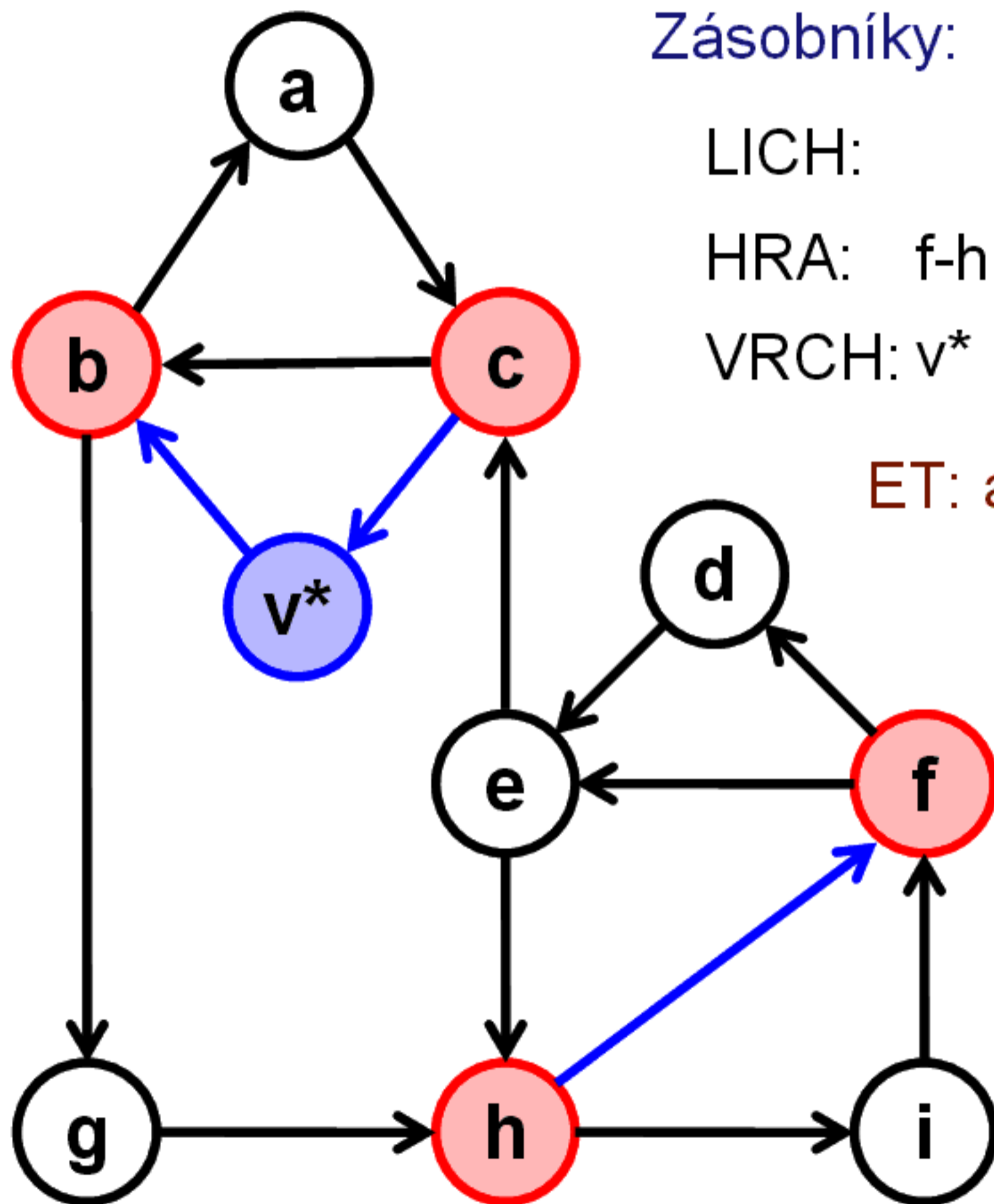
LICH:

HRA: f-h

VRCH:  $v^*$

ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



Zásobníky:

LICH:

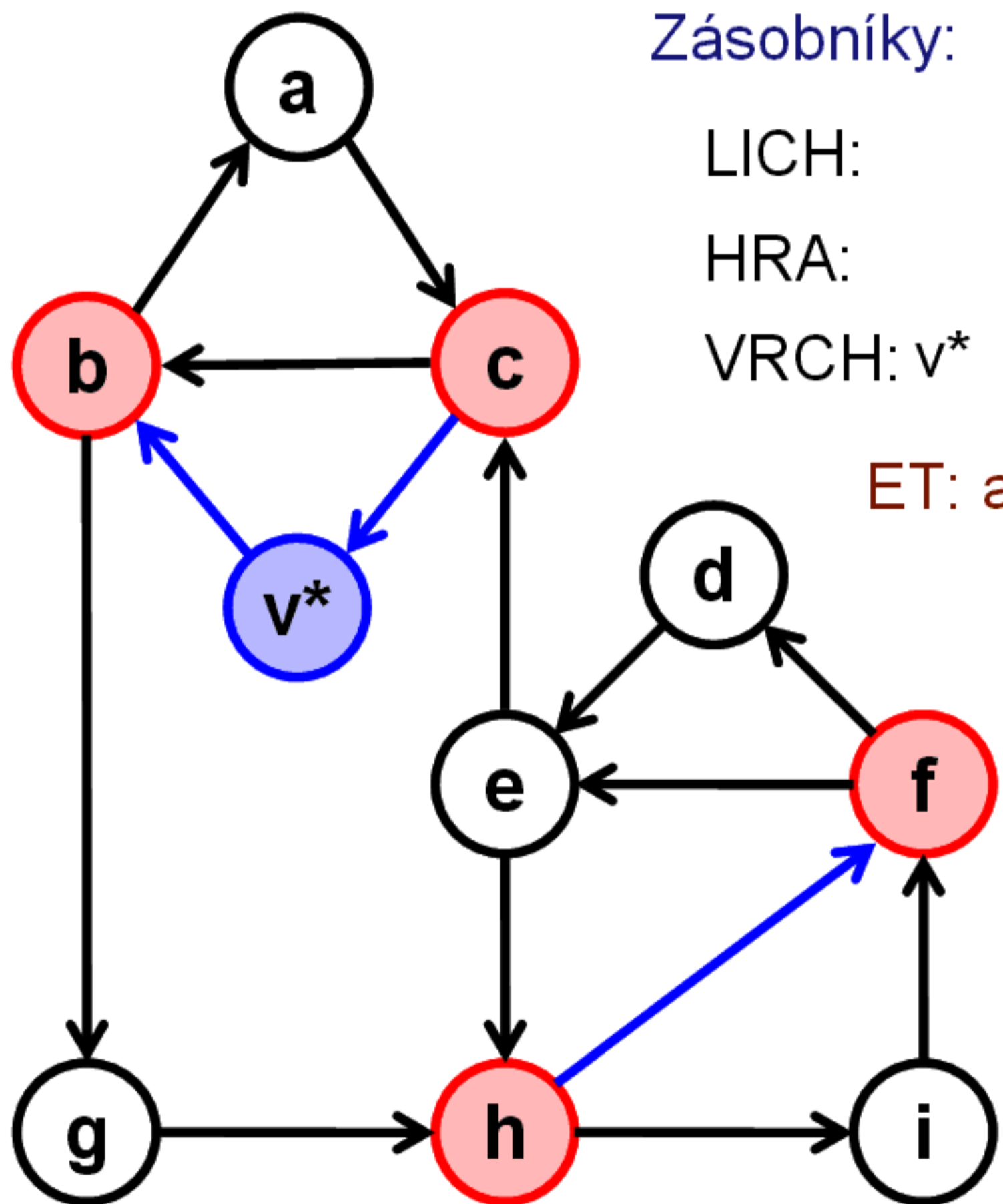
HRA: f-h

VRCH:  $v^*$

ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

a) odstraníme hranu ze zásobníku HRA

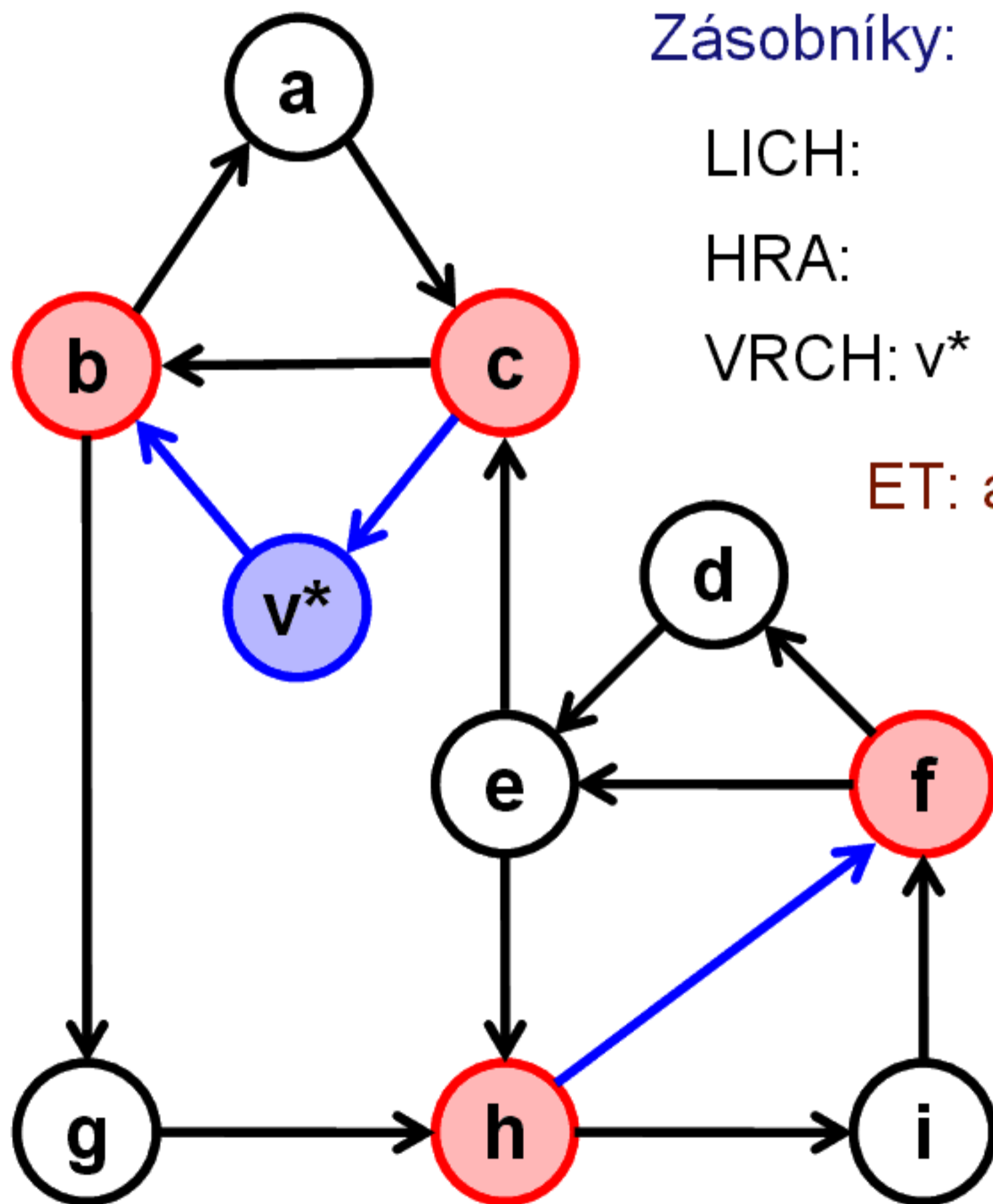
#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

a) odstraníme hranu ze zásobníku HRA

#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET

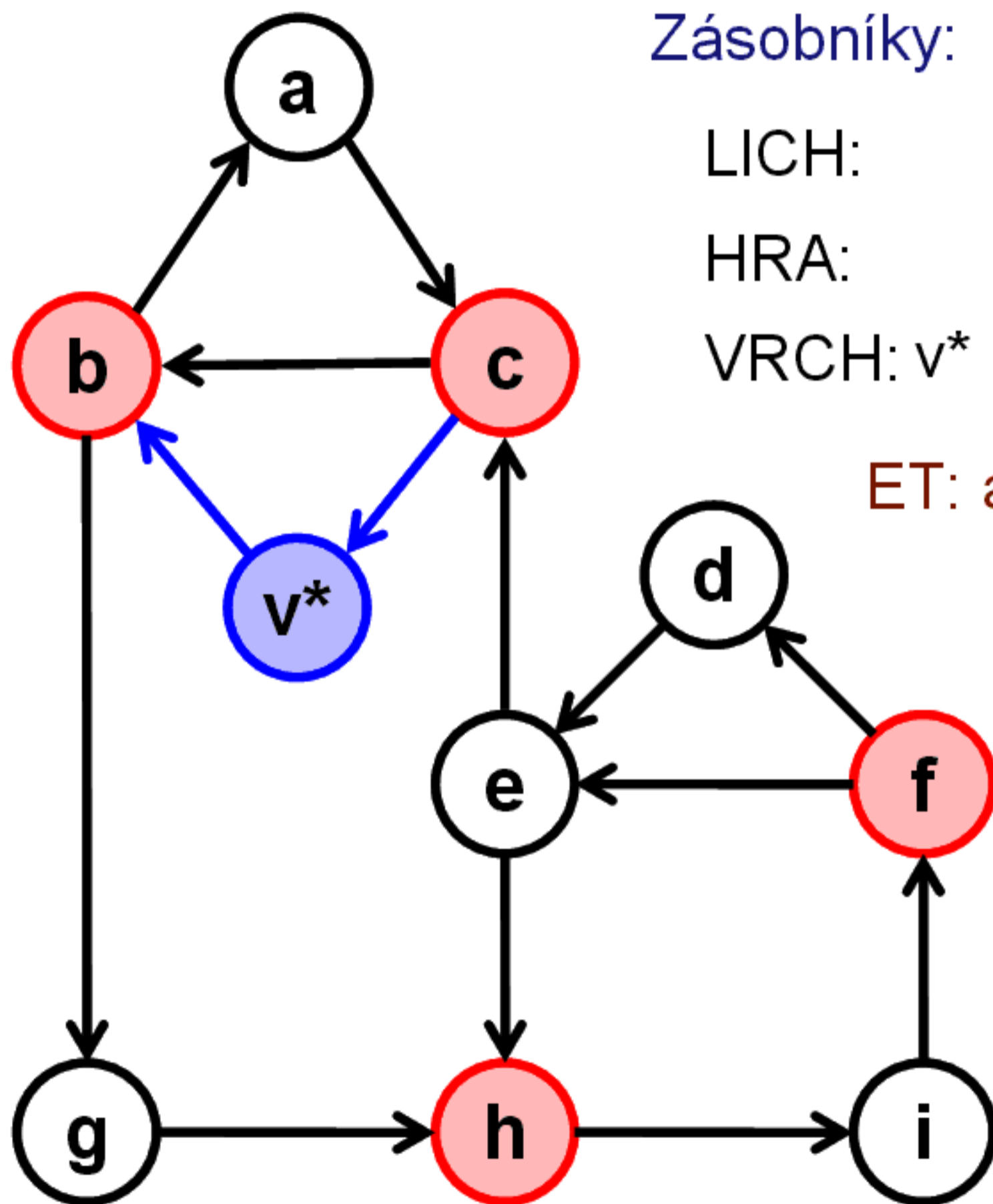


ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

a) odstraníme hranu ze zásobníku HRA

b) vymažeme hranu z grafu

#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET

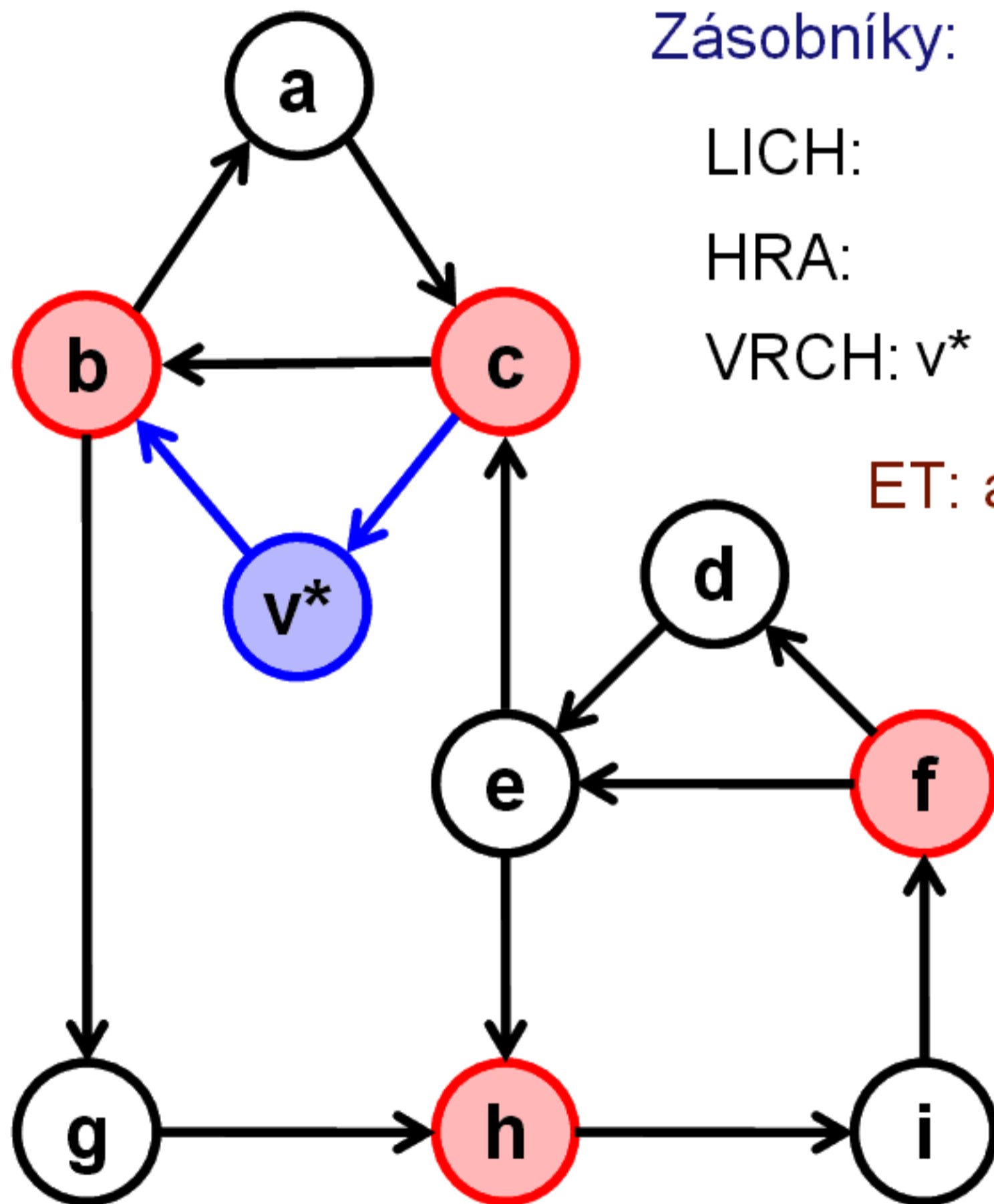


ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

a) odstraníme hranu ze zásobníku HRA

b) vymažeme hranu z grafu

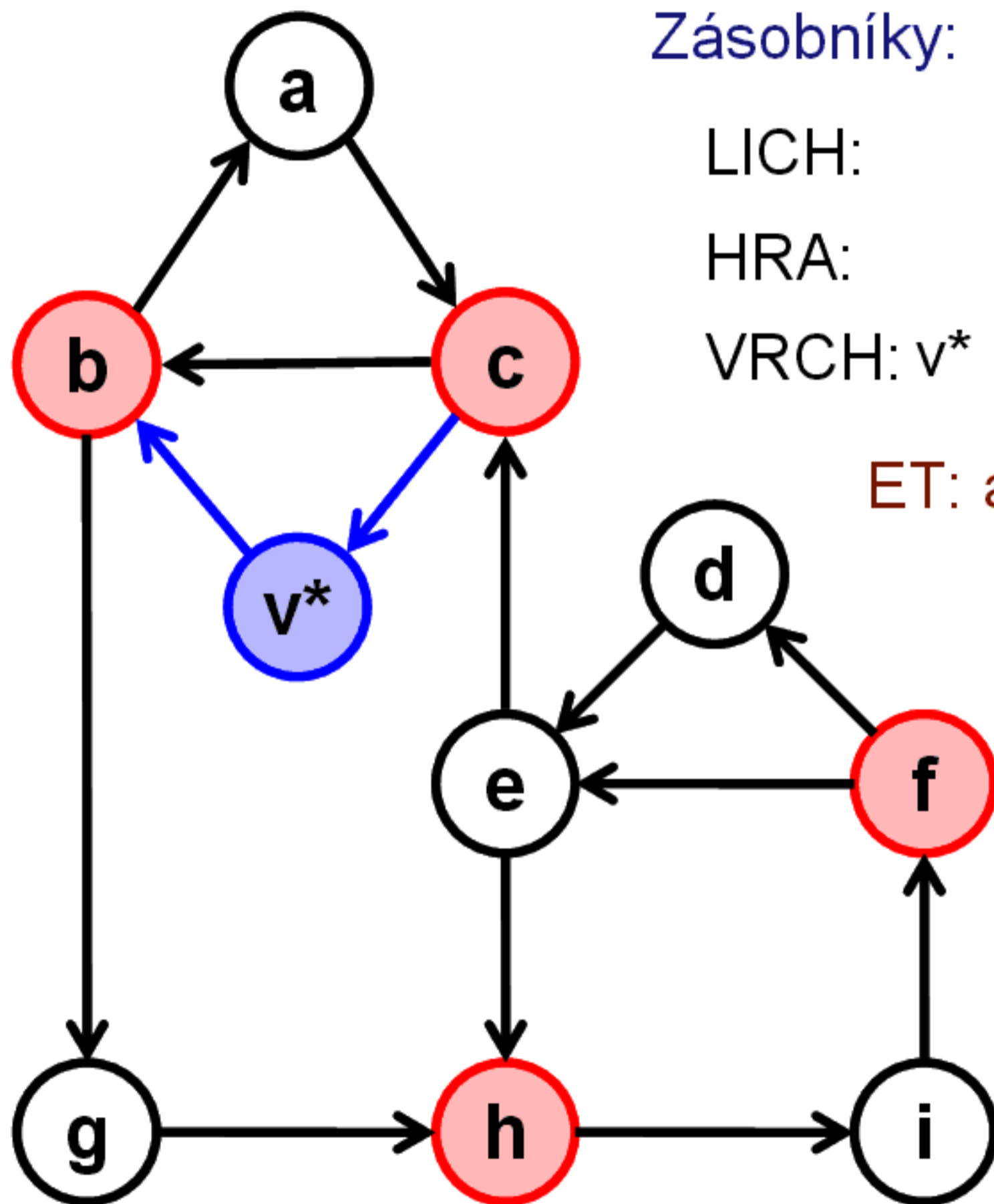
#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

- odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- vymažeme hranu z grafu
- upravíme ET

#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET

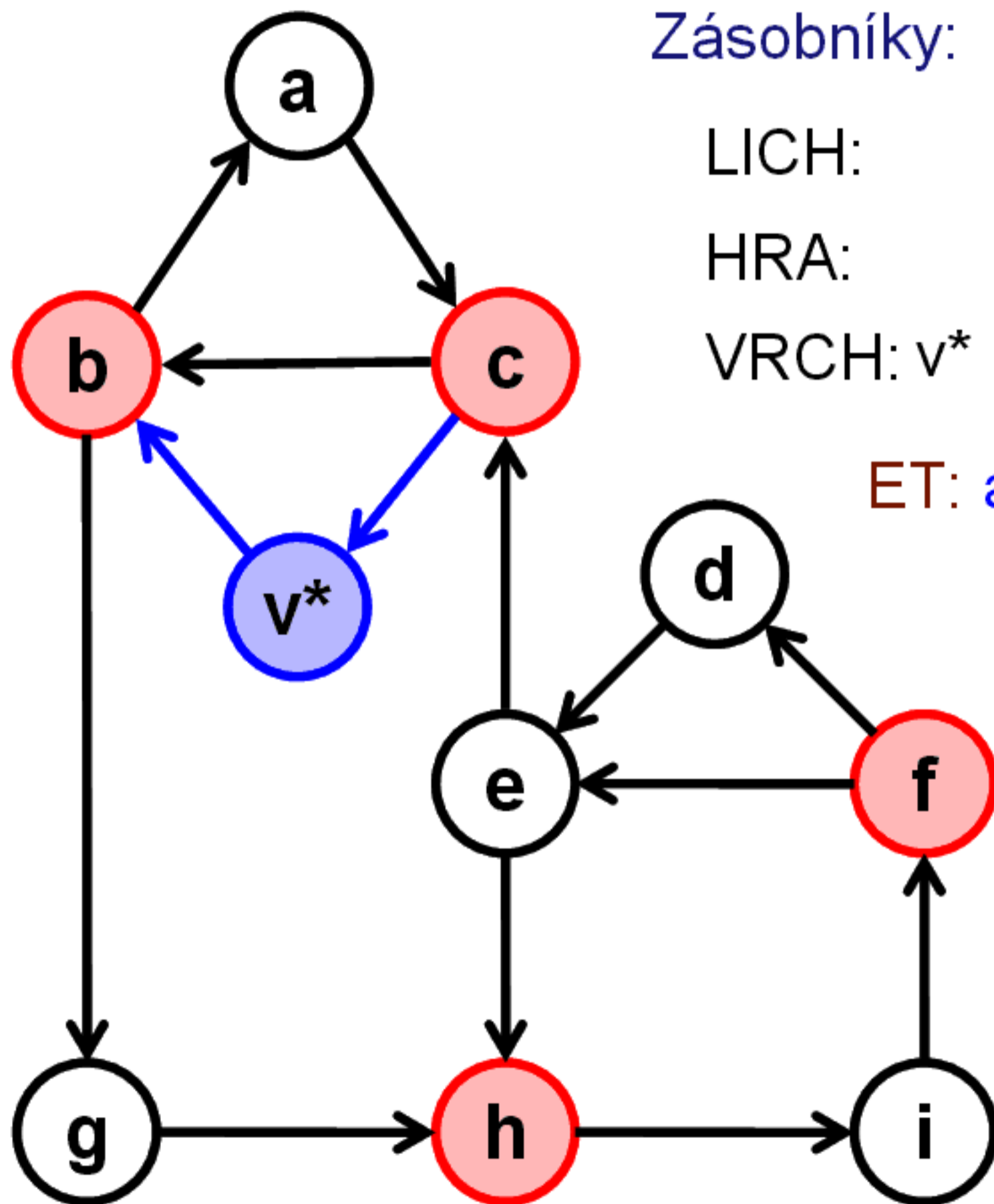


ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

- odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- vymažeme hranu z grafu
- upravíme ET



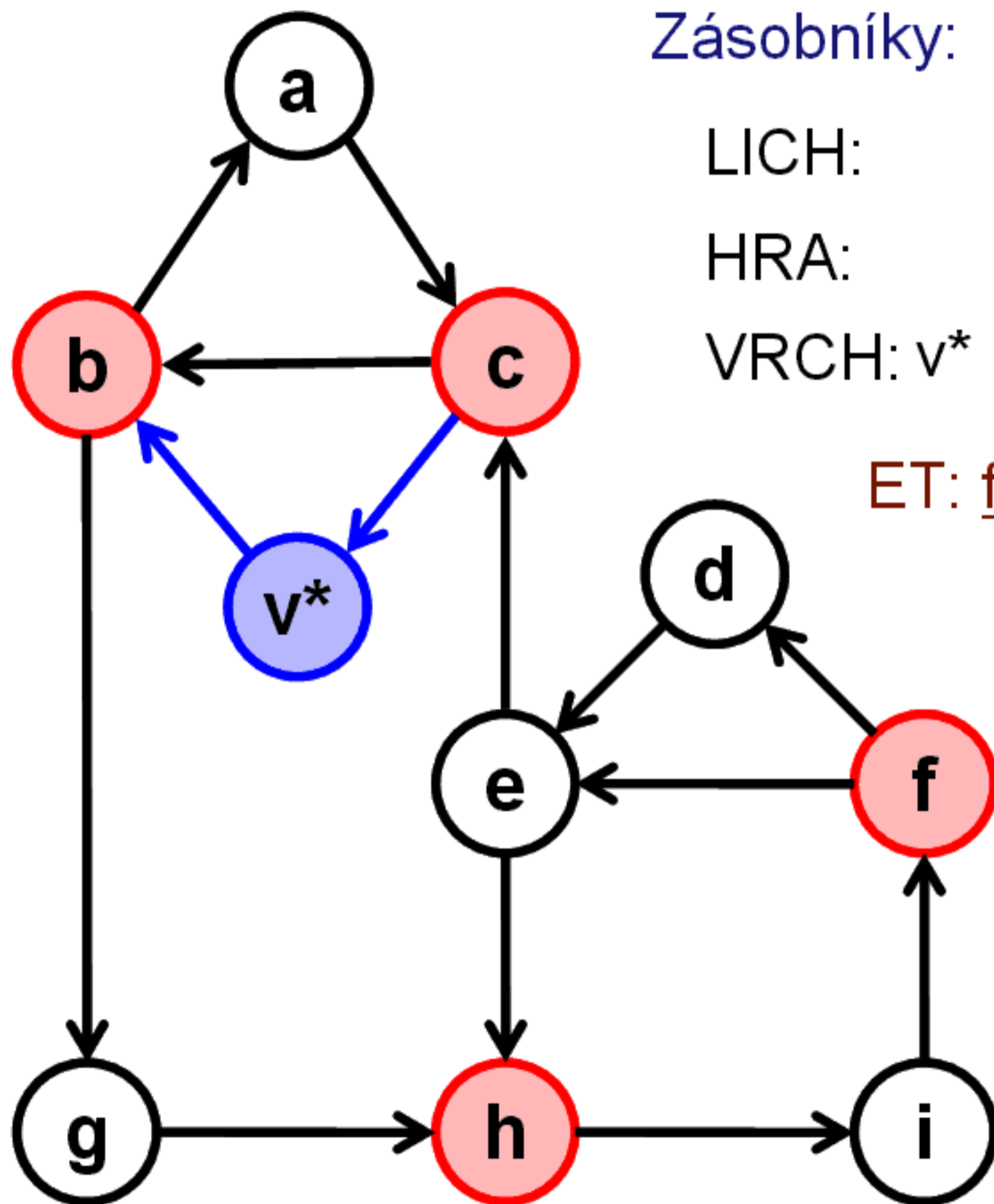
4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h, f, d, e, c, b, a

- a) odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- b) vymažeme hranu z grafu
- c) upravíme ET

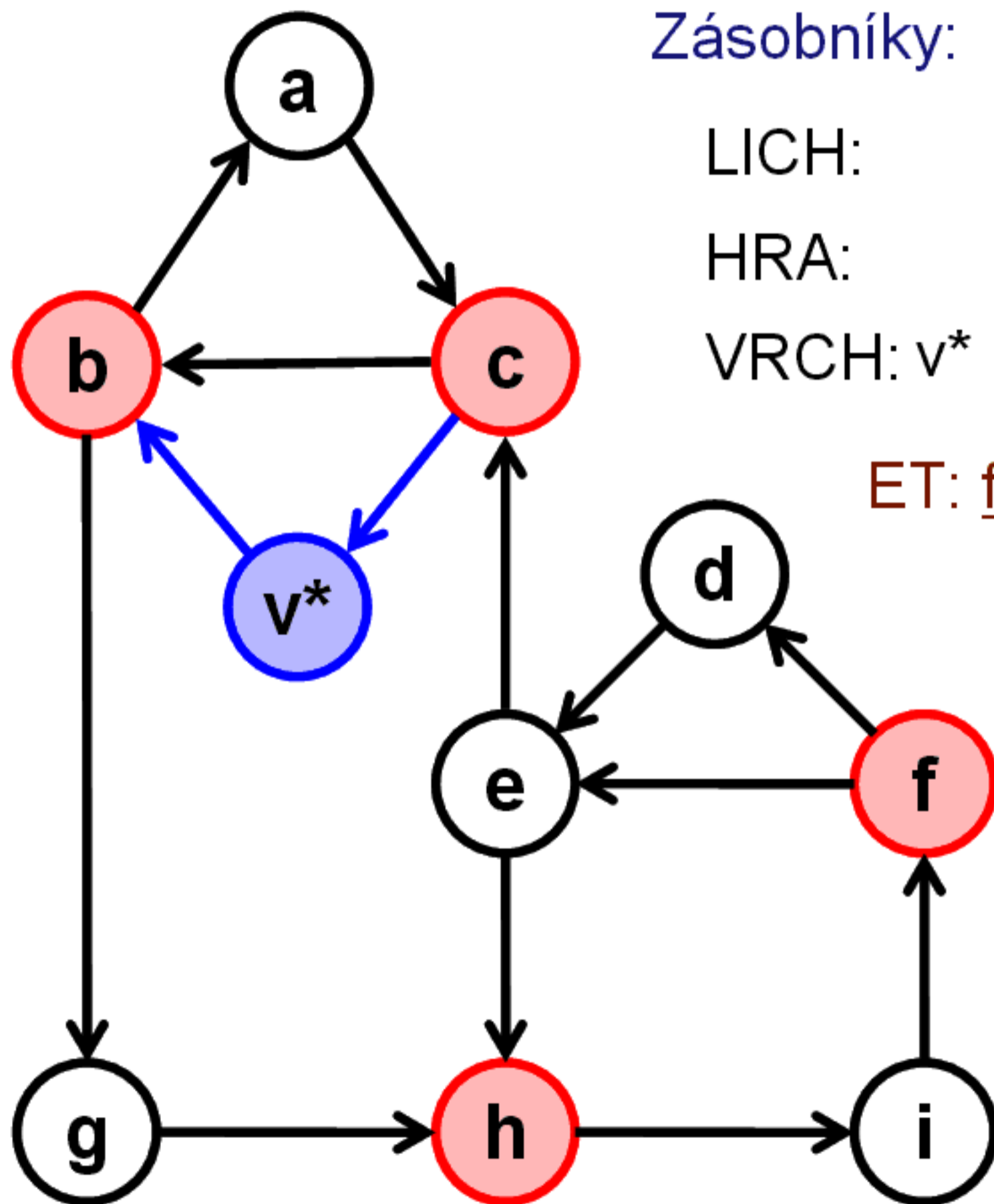
#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: f, d, e, c, b, a, a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h

- odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- vymažeme hranu z grafu
- upravíme ET

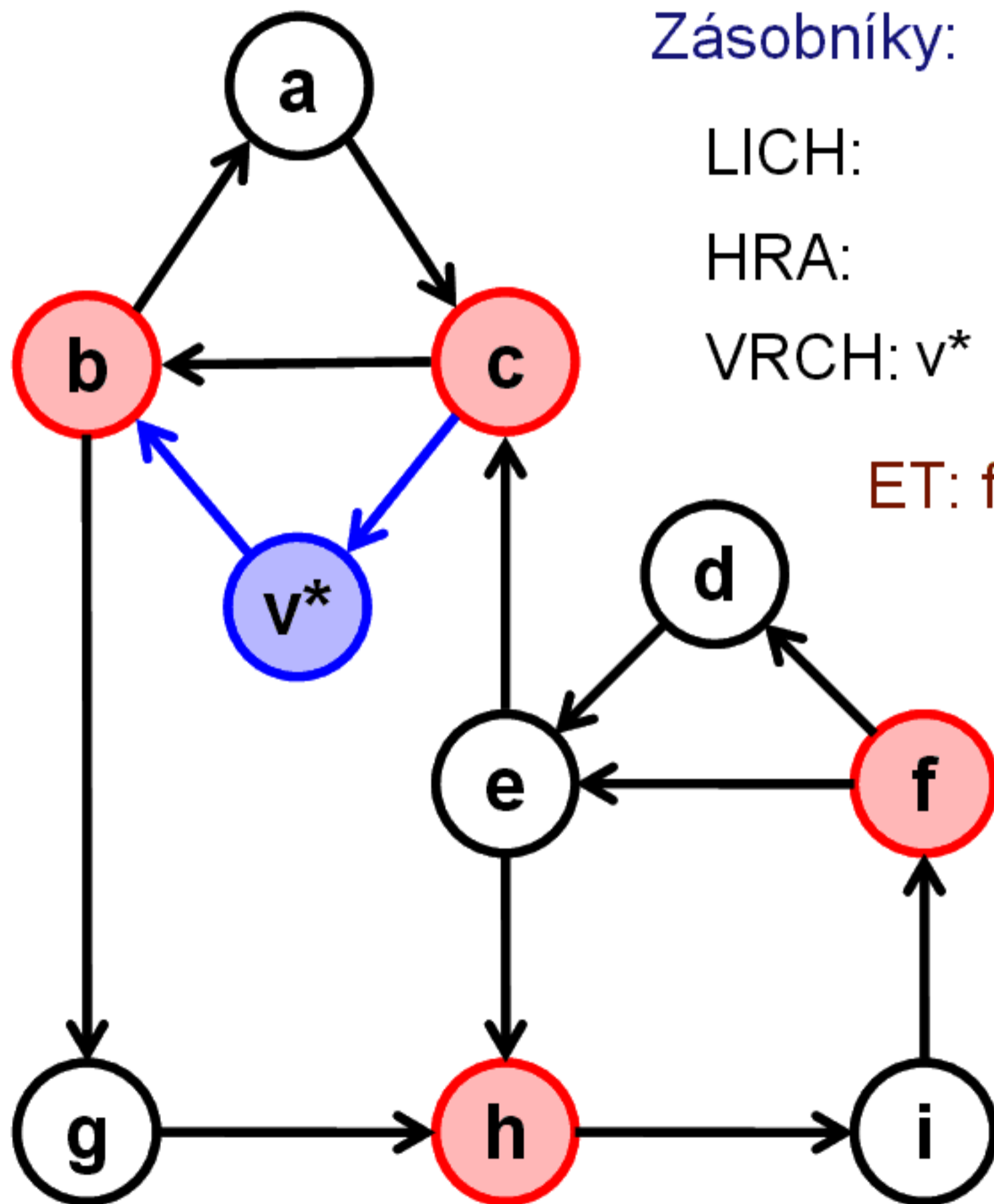
#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: f, d, e, c, b, a, **a**, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h

- odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- vymažeme hranu z grafu
- upravíme ET

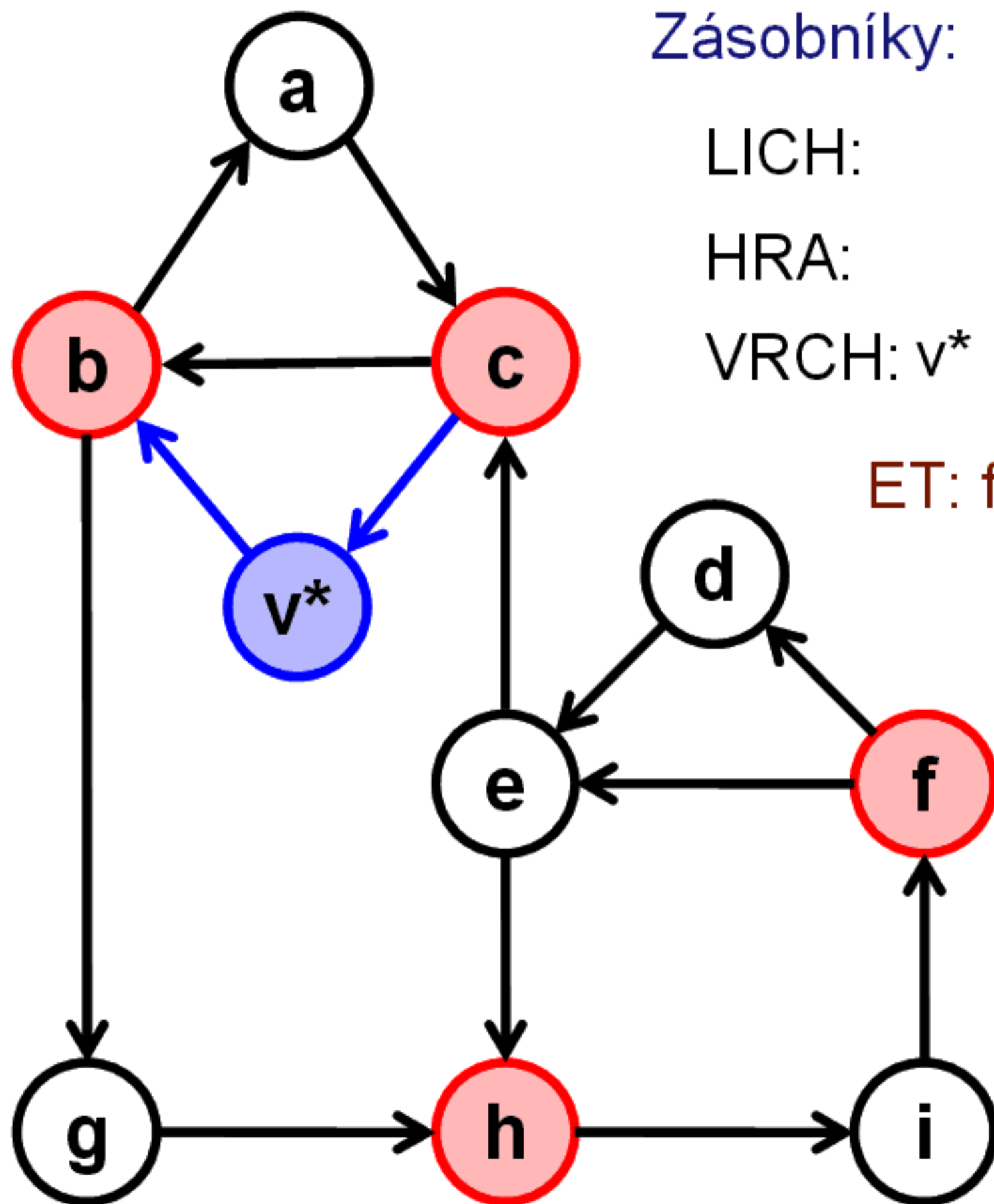
#### 4. Odstraníme pomocné hrany (HRA) a upravíme či rozdělíme nalezený ET



ET: f, d, e, c, b, a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h

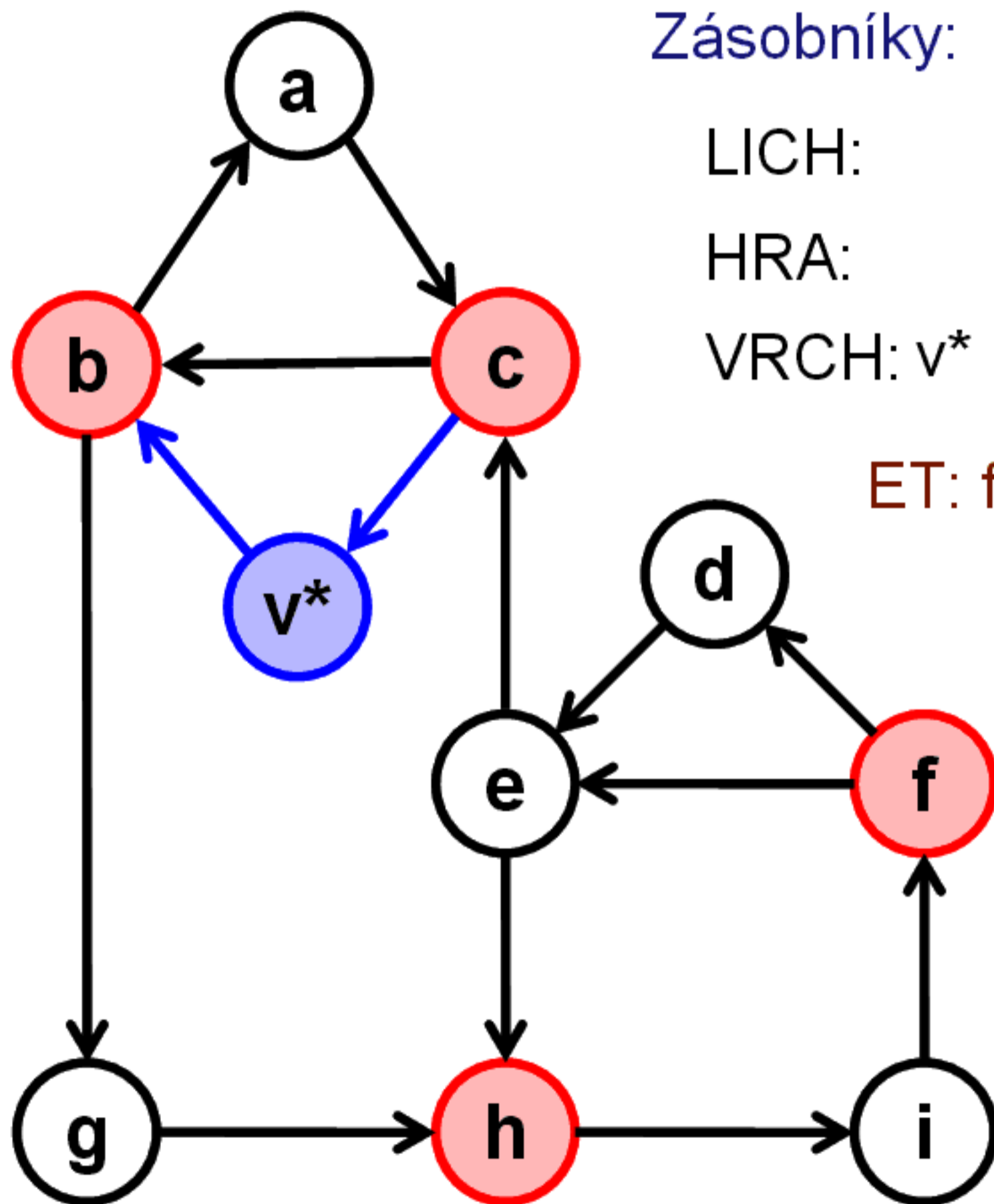
- odstraníme hranu ze zásobníku HRA
- vymažeme hranu z grafu
- upravíme ET

5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



ET: f, d, e, c, b, a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h

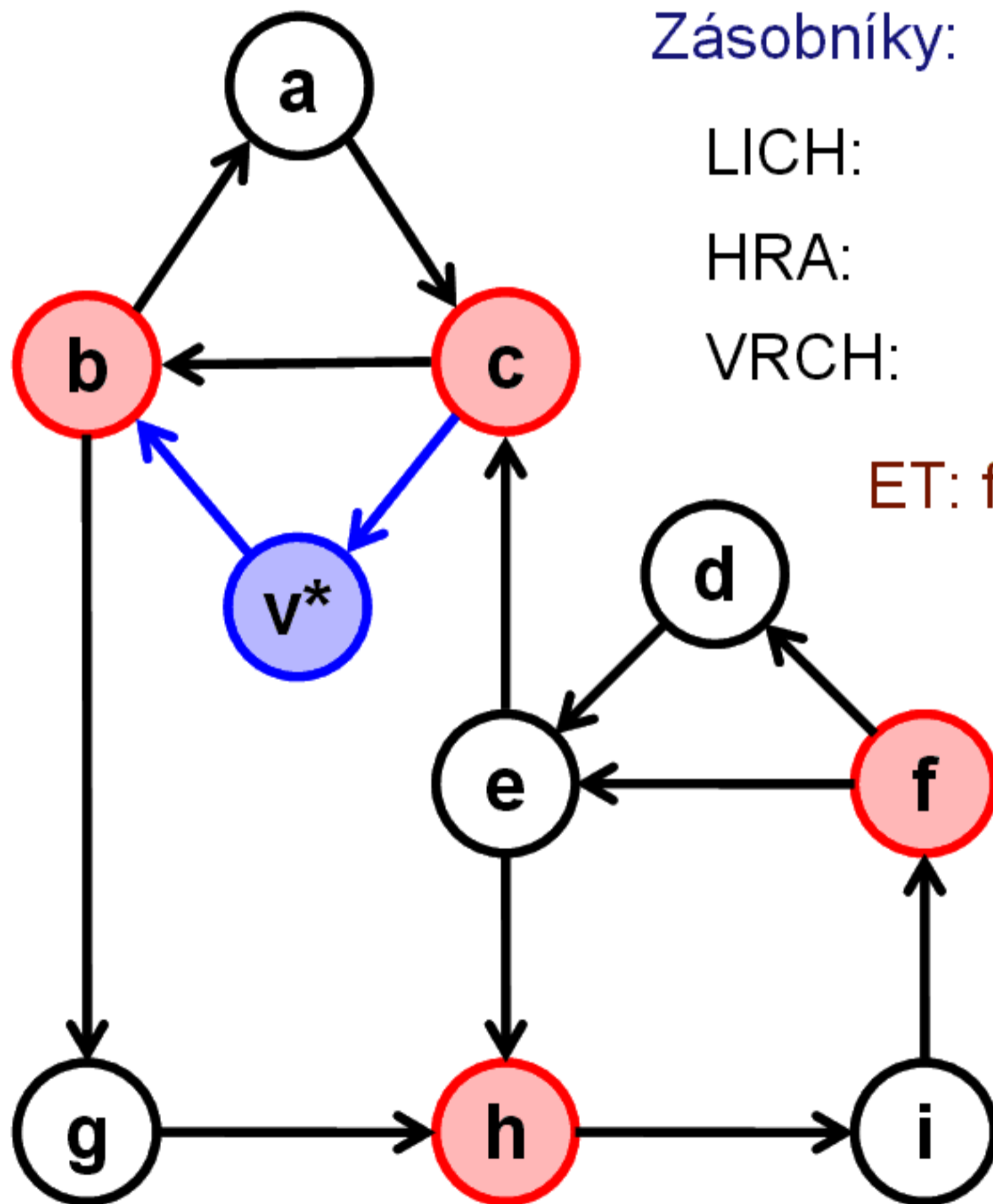
5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



ET: f, d, e, c, b, a, c,  $v^*$ , b, g, h, i, f, e, h

a) odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH

5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

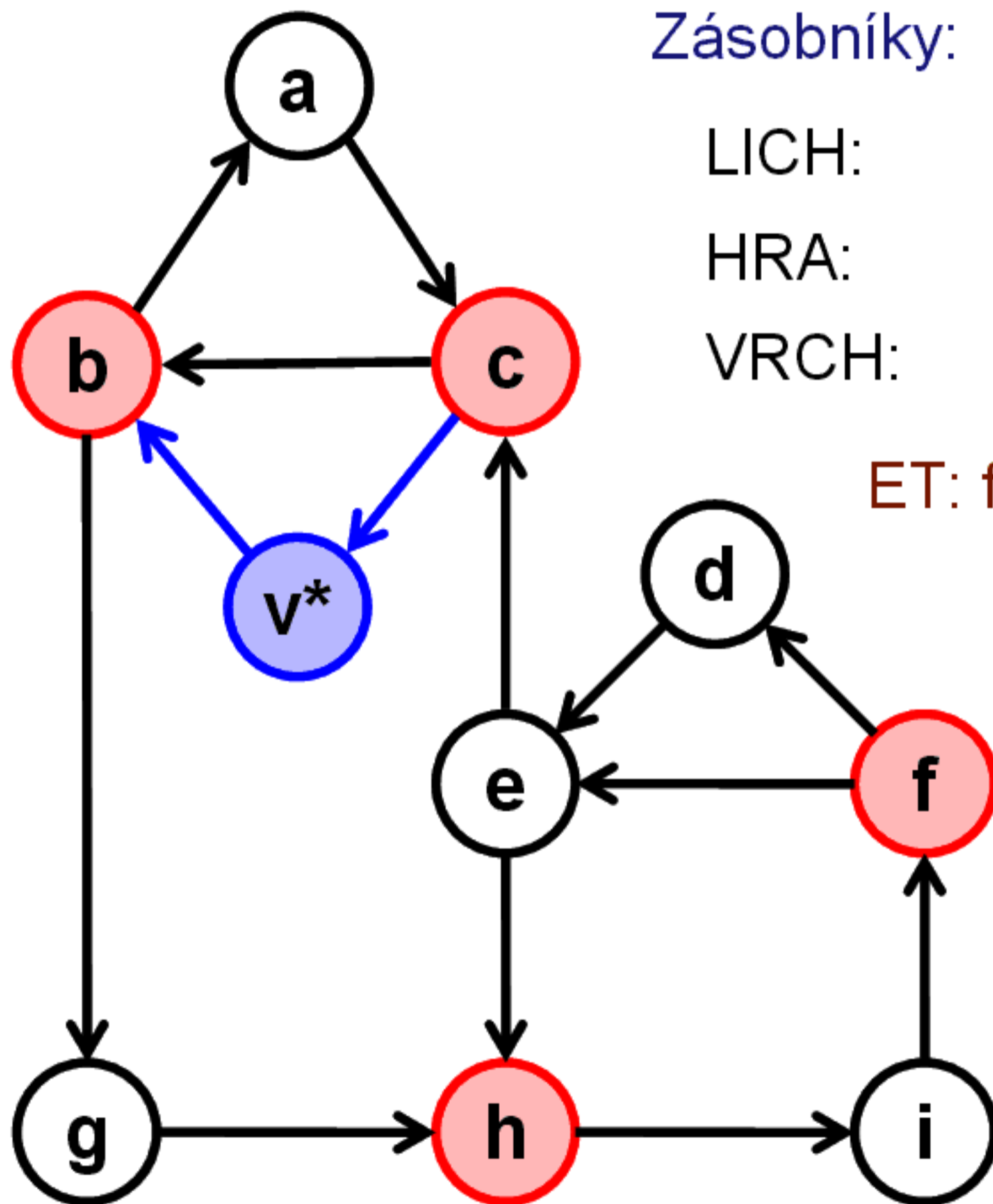
HRA:

VRCH:

ET: f, d, e, c, b, a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h

a) odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH

5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

HRA:

VRCH:

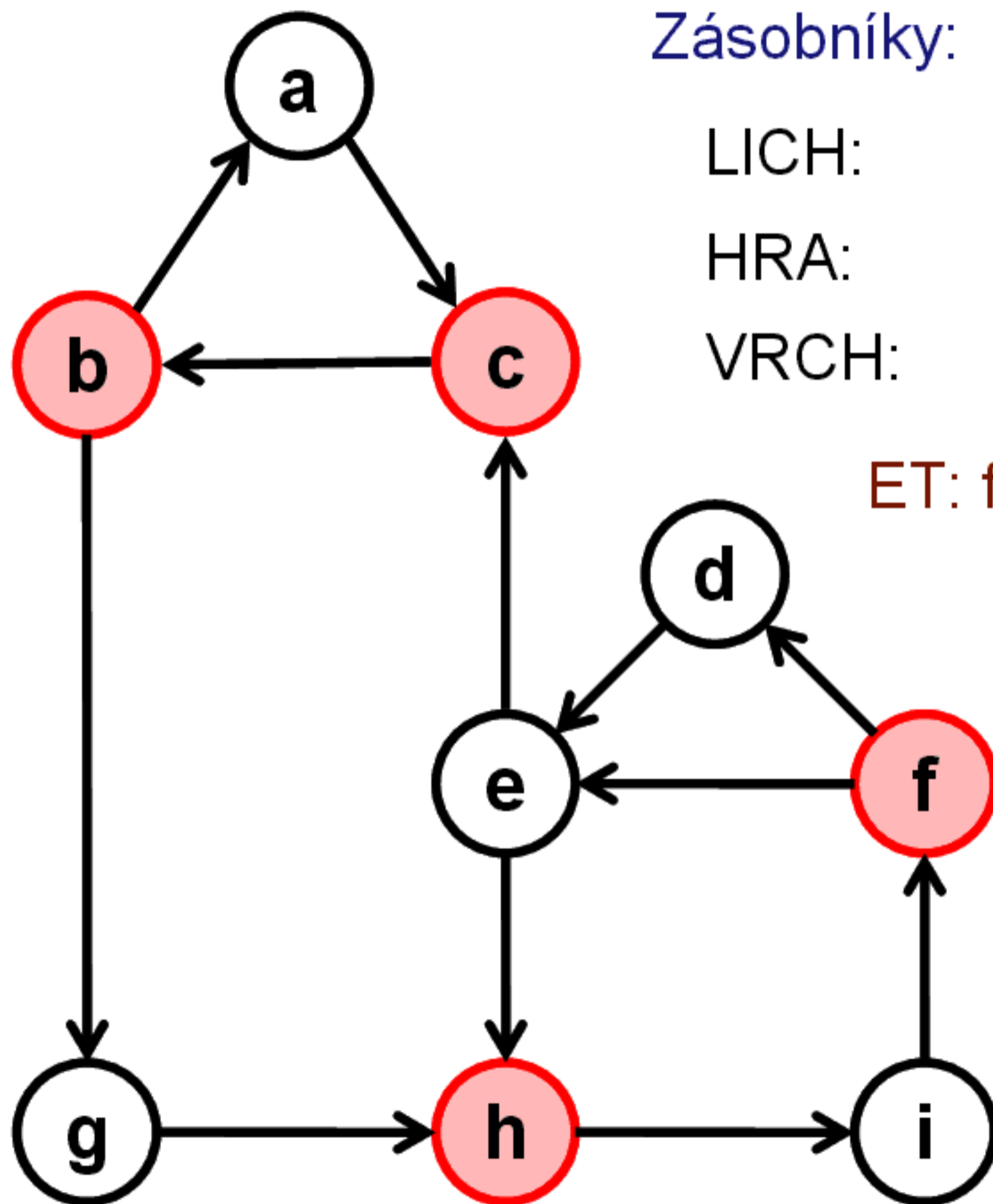
ET: f, d, e, c, b, a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h

a) odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH

b) vymažeme vrchol a s ním incidentní hrany z grafu



## 5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

HRA:

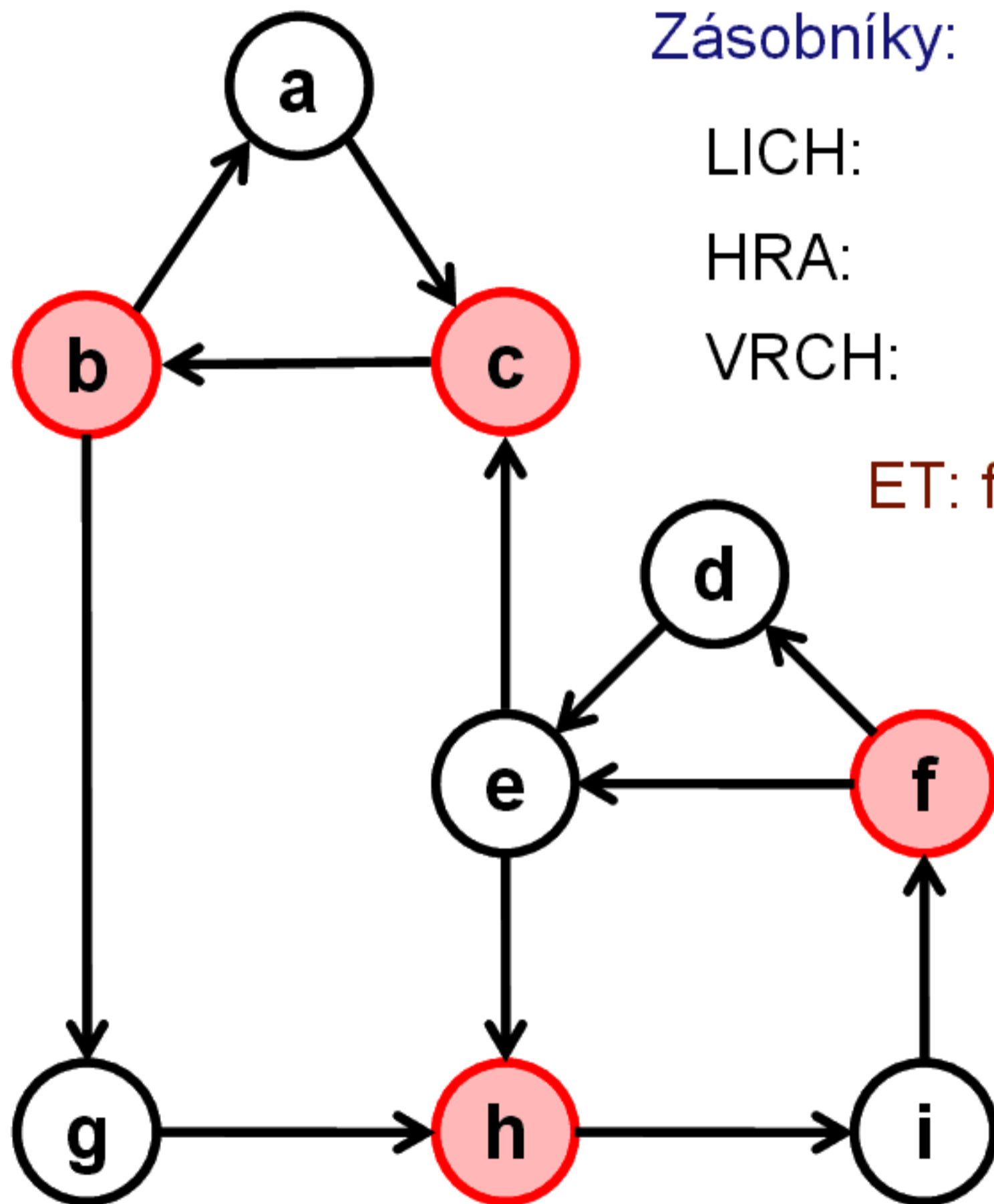
VRCH:

ET: f, d, e, c, b, a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h

a) odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH

b) vymažeme vrchol a s ním incidentní hrany z grafu

## 5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

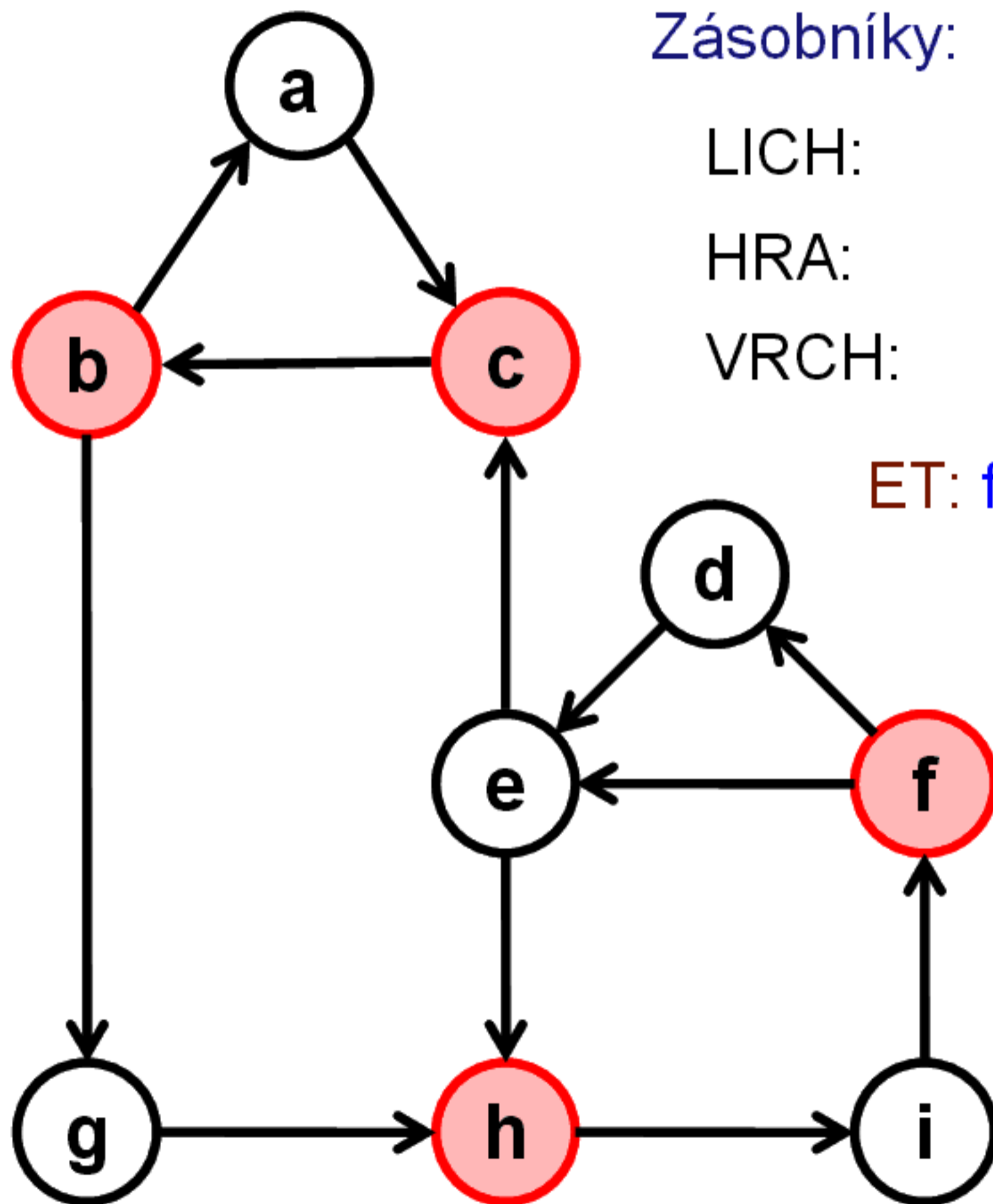
HRA:

VRCH:

ET: f, d, e, c, b, a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h

- odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH
- vymažeme vrchol a s ním incidentní hrany z grafu
- upravíme či rozdělíme ET

## 5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

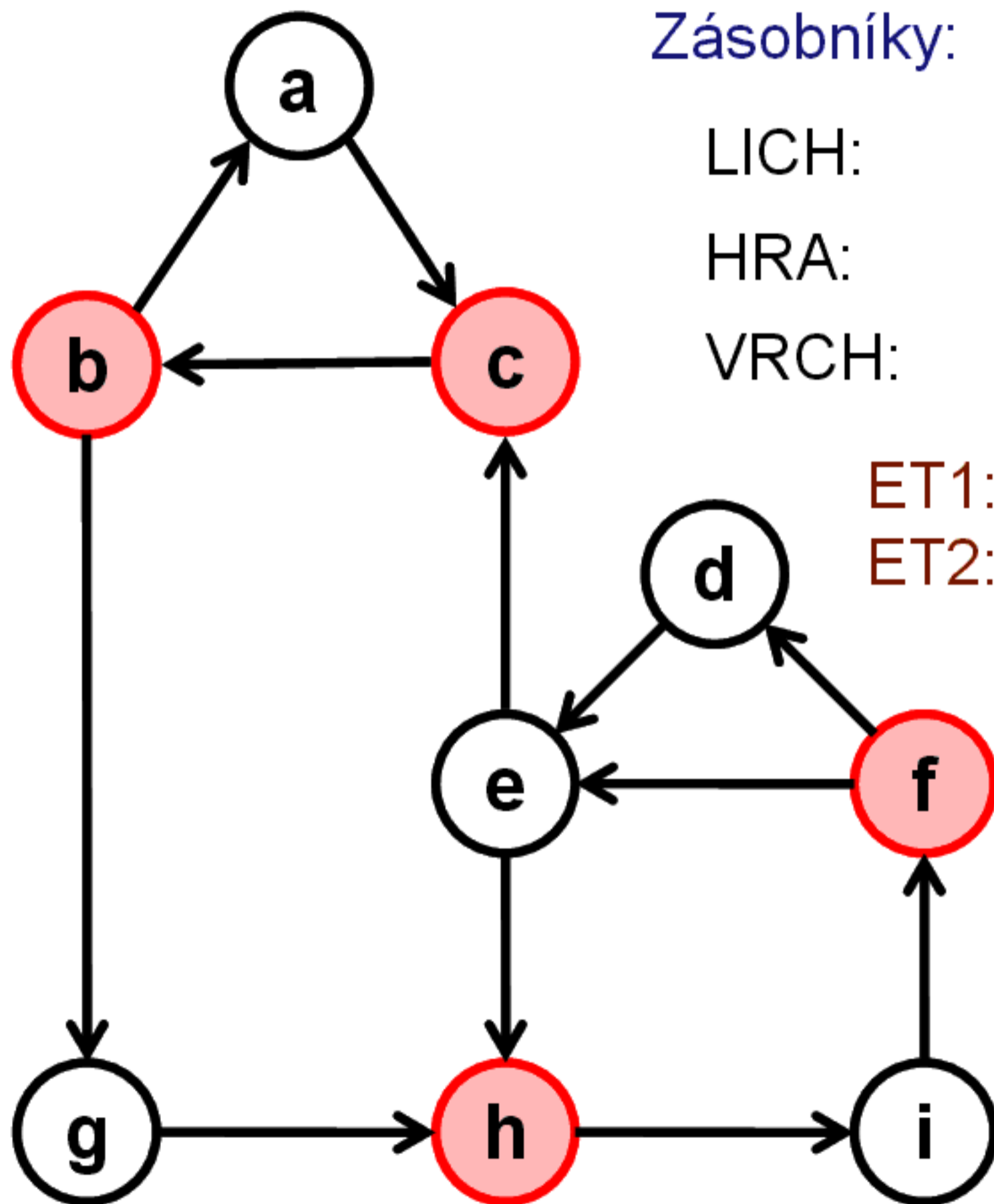
HRA:

VRCH:

ET: f, d, e, c, b, a, c, v\*, b, g, h, i, f, e, h

- odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH
- vymažeme vrchol a s ním incidentní hrany z grafu
- upravíme či rozdělíme ET

## 5. Odstraníme pomocné vrcholy (VRCH) a hrany s nimi incidentními a rozdělíme ET



Zásobníky:

LICH:

HRA:

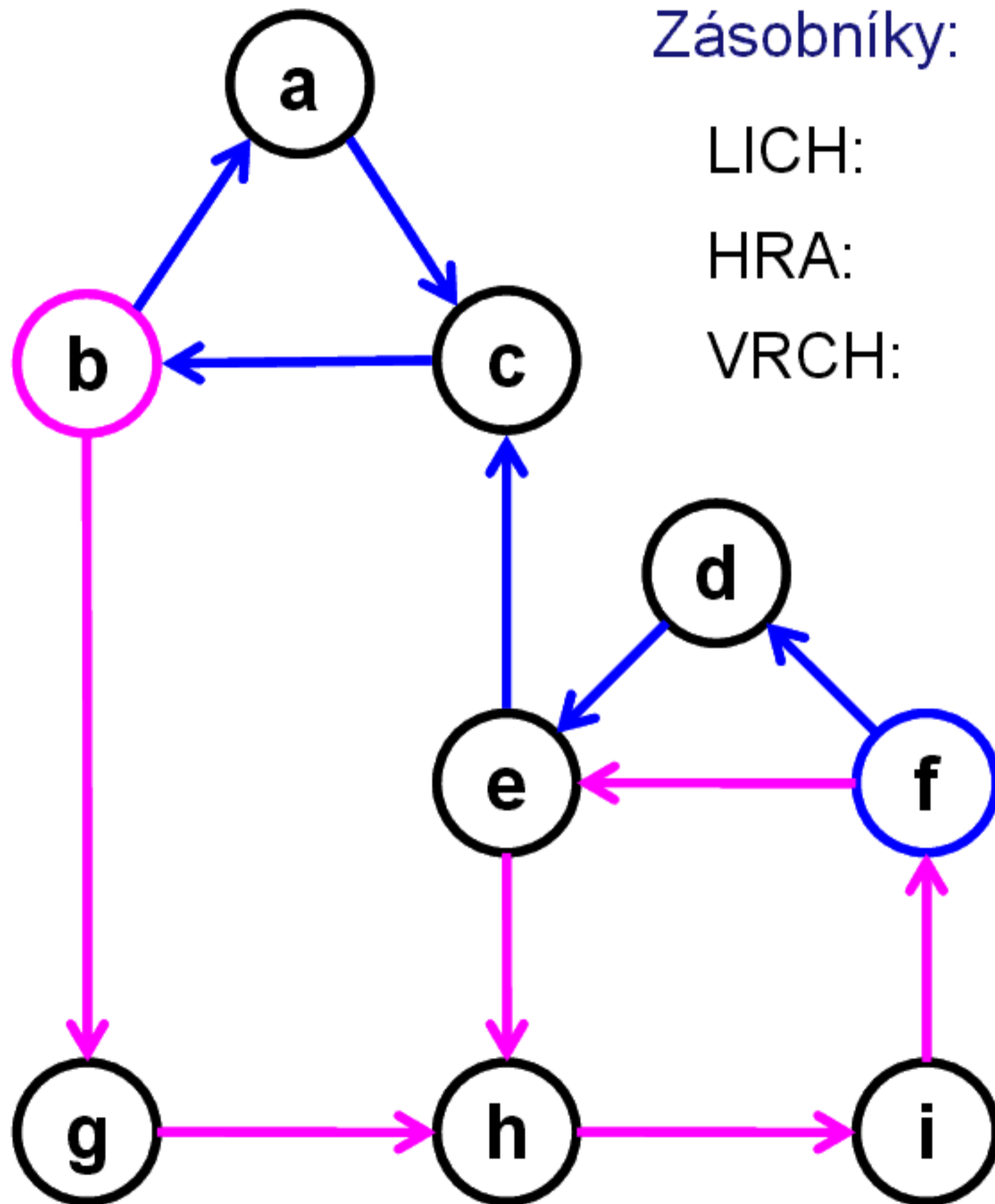
VRCH:

ET1: f, d, e, c, b, a, c

ET2: b, g, h, i, f, e, h

- odstraníme vrchol ze zásobníku VRCH
- vymažeme vrchol a s ním incidentní hrany z grafu
- upravíme či rozdělíme ET

6. Řešení: K nakreslení daného grafu je zapotřebí minimálně dvou tahů – ET1 a ET2.



**ET1:** f, d, e, c, b, a, c  
**ET2:** b, g, h, i, f, e, h

# Závěr

Minimální počet tahů potřebný k nakreslení grafu je roven polovině počtu vrcholů lichého stupně.

$$\text{počet tahů} = \frac{v_{\text{lich}}}{2}$$

Kterými vrcholy jednotlivé tahy povedou záleží na volbě dvojic vrcholů lichého stupně pro jejich vzájemné propojení.